Конспект по геометрии

Литература

1) Ханбеков Н. Д. Откуда берётся геометрия? – М., 2020
2) Погорелов А. В. Элементарная геометрия. Изд. 3-е, доп. – М.: Наука, 1977
3) Погорелов А. В. Геометрия 6-10. – М.: Просвещение, 1982
4) Погорелов А. В. Геометрия. – М.: Наука, 1983
5) Энциклопедия элементарной математики, кн. 4 – М.: Физматгиз, 1963
6) Энциклопедия элементарной математики, кн. 5 – М.: Физматгиз, 1966

Версия 10.10.2026 г.

Оглавление

§1. Аксиомы I-VI
1. Что изучает геометрия……8
2. Принадлежность и пересечение……9
3. Отрезок……9
4. Полуплоскость……12
5. Полупрямая……16
6. Координаты на прямой……18

§2. Аксиомы VII-X
1. Угол……21
2. Равенство треугольников……26
3. Параллельные прямые……27
4. Анализ аксиоматики……29

§3. Углы
1. Вертикальные углы……30
2. Прямой угол. Перпендикулярные прямые……30

§4. Равенство треугольников
1. Второй признак равенства треугольников……31
2. Равнобедренный треугольник……32
3. Медиана, биссектриса и высота……32
4. Равносторонний треугольник……34
5. Третий признак равенства треугольников……34
.
§5. Соотношения между углами и сторонами треугольника
1. Соотношения между углами треугольника……35
2. Соотношение между углами треугольника и противолежащими им сторонами.36
3. Неравенство треугольника……37

§6. Прямоугольные треугольники
1. Углы и стороны прямоугольного треугольника……38
2. Равенство прямоугольных треугольников……39
3. Перпендикуляр и наклонная……40

§7. Параллельные прямые
1. Признаки параллельности прямых……42
2. Сумма углов треугольника……43
3. Параллельные прямые как равноотстоящие прямые……44

§8. Четырёхугольники

1. Выпуклые четырёхугольники……45
2. Параллелограмм……47
3. Прямоугольник. Ромб. Квадрат……49
4. Теорема Фалеса……50
5. Точка пересечения медиан треугольника……51
6. Трапеция……52

§9. Движение. Равенство фигур

1. Понятие движения……54
2. Свойства движения……54
3. Симметрия относительно прямой……56
4. Симметрия относительно точки……58
5. Равенство фигур……60
6. Параллельный перенос……61
7. Поворот……62

§10. Окружность

1. Простейшие свойства окружности……64
2. Центральные углы……66
3. Вписанные углы……67
4. Вписанная окружность……70
5. Описанная окружность……72

§11. Подобие треугольников

1. Основной признак подобия треугольников……73
2. Другие признаки подобия треугольников……75
3. Пропорциональные отрезки в треугольнике……76
4. Пропорциональность отрезков хорд и секущих……77
5. Пересечение прямой с окружностью……79
6. Гомотетия. Подобие фигур……79

§12. Теорема Пифагора и её применения

1. Теорема Пифагора……81
2. Соотношения в косоугольном треугольнике……82
3. Соотношение между диагоналями и сторонами параллелограмма……83
4. Медианы, биссектрисы и высоты треугольника……84
5. Существование треугольника с данными сторонами……84
6. Взаимное расположение двух окружностей……85

§13. Геометрические построения

1. Инструменты построения……87
2. Основные задачи на построение……89

3. Примеры решения задач на построение……91
4. Геометрическое место точек……93
5. Метод геометрических мест……94

§14. Тригонометрические функции углов
1. Определение тригонометрических функций……95
2. Формулы приведения……95
3. Соотношения между сторонами и углами в прямоугольном треугольнике……97
4. Теорема косинусов……98
5. Теорема синусов……98

§15. Многоугольники
1. Ломаная……99
2. Выпуклые многоугольники……100
3. Сумма углов выпуклого многоугольника……101
4. Пополненный многоугольник. Выпуклая ломаная……102
5. Правильные многоугольники……106
6. Вписанные и описанные многоугольники……107

§16. Площадь многоугольников
1. Понятие площади……108
2. Площадь прямоугольника……110
3. Площади параллелограмма, треугольника и трапеции……112
4. Площадь многоугольной фигуры……113
5. Формулы площади треугольника……119
6. Площади подобных фигур……120

§17. Длина окружности. Площадь круга
1. Длина окружности……120
2. Свойства дуг и центральных углов……122
3. Длина дуги окружности. Радианная мера угла……127
4. Общее определение площади……129
5. Площадь круга……132
6. Формулы для вычисления площади круга, кругового сектора и сегмента……134

§18. Векторное исчисление
1. Свойства параллельного переноса……138
2. Направление полупрямой……140
3. Понятие вектора……142
4. Сложение и вычитание векторов……143
5. Умножение вектора на число……145
6. Скалярное произведение векторов……149

§19. Метод координат
1. Прямоугольные декартовы координаты на плоскости……151
2. Векторные операции в координатах……152
3. Расстояние между точками……153
4. Деление отрезка в данном отношении……154
5. Уравнение окружности……154
6. Уравнение прямой……155
7. Расположение прямой относительно системы координат……156
8. Примеры решения задач на прямую……157
9. Уравнения движения……159

§20. Тригонометрия
1. Определение тригонометрических функций для любых значений аргумента..161
2. Формулы приведения……162
3. Формулы сложения для тригонометрических функций……163

§21. Аксиомы стереометрии и некоторые их следствия
1. Аксиомы стереометрии……165
2. Некоторые следствия аксиом стереометрии……166
3. Точки в пространстве……167

§22. Параллельность прямых и плоскостей
1. Параллельные прямые в пространстве……169
2. Параллельность прямой и плоскости……170
3. Параллельность плоскостей……171
4. Отрезки параллельных прямых между параллельными плоскостями……172
5. Скрещивающиеся прямые……173

§23. Перпендикулярность прямых и плоскостей
1. Перпендикулярность прямых……174
2. Перпендикулярность прямой и плоскости……175
3. Свойства перпендикулярности прямой и плоскости……177
4. Построение взаимно перпендикулярных плоскости и прямой……178
5. Перпендикуляр и наклонная. Теорема о трёх перпендикулярах……178
6. Расстояние между скрещивающимися прямыми……180
7. Перпендикулярность плоскостей……181

§24. Углы между прямыми и плоскостями
1. Угол между прямыми……183
2. Угол между прямой и плоскостью……184
3. Угол между плоскостями……185

§25. Двугранные, трёхгранные и многогранные углы
1. Определение двугранного и трёхгранного углов……187
2. Теоремы косинусов и синусов для трёхгранного угла……187
3. Неравенство для плоских углов трёхгранного угла……190
4. Многогранные углы……191

§26. Движение и другие преобразования пространства
1. Движение и его свойства……192
2. Симметрия относительно плоскости и точки, параллельный перенос……193
3. Проектирование плоскости на плоскость……194

§27. Многогранники
1. Выпуклые многогранники……197
2. Призма……200
3. Параллелепипед……202
4. Пирамида……203
5. Правильные многогранники……206

§28. Тела вращения
1. Цилиндр……206
2. Конус……208
3. Шар……211

§29. Объёмы многогранных тел
1. Понятие объёма……213
2. Объём прямоугольного параллелепипеда……215
3. Объём наклонного параллелепипеда……216
4. Объём призмы……217
5. Объём пирамиды……218
6. Объёмы многогранных тел……221
7. Объёмы подобных тел. Объём усечённой пирамиды……228

§30. Объём и площадь поверхности тел вращения
1. Общее определение объёма……229
2. Объём цилиндра и объём конуса……232
3. Объём шара……233
4. Площадь боковой поверхности цилиндра и конуса……235
5. Площадь сферы……236

§31. Векторы и координаты в пространстве
1. Векторы в пространстве……237
2. Координаты в пространстве……241
3. Векторные операции в координатах……241

4. Расстояние между точками…….…….243
5. Деление отрезка в данном отношении…….…….243
6. Уравнение сферы…….…….244
7. Уравнение плоскости…….…….244
8. Расположение плоскости относительно системы координат…….245
9. Основные задачи на прямую и плоскость…….……..….245
10. Уравнения движения…….……..…….246

Вопросы к экзамену…….…….248
Приложение. Основные принципы логики…….….253

§1. Аксиомы I-VI

1. Что изучает геометрия

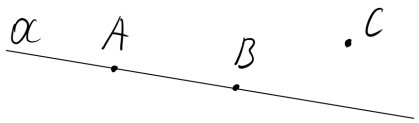
В геометрии мы будем рассматривать два основных вида объектов – *точку* и *прямую.*

Любой объект, состоящий из точек, включая отдельную точку, называется *геометрической фигурой.* Прямая тоже состоит из точек, поэтому является геометрической фигурой.

Геометрия – это наука о свойствах геометрических фигур.

Точки обозначаются прописными латинскими буквами *A, B, C, D,* …
Прямые обозначаются строчными латинскими буквами *a, b, c, d,* …

Иногда одной и той же фигуре, например, точке, могут быть присвоены два обозначения: точка *A* и точка *B.* В этом случае говорят, что точки *A* и *B* совпадают или, что они не являются различными.



Если некоторая точка *A* является точкой данной фигуры, мы говорим, что точка *A* *принадлежит* данной фигуре. Принадлежность точки фигуре является примером *отношения* между фигурами.

Будем говорить, что фигура *F* является *частью* фигуры *G* если все точки фигуры *F* являются точками фигуры *G*. Также в этом случае будем говорить, что фигура *G* *содержит* фигуру *F*.

Предложение, выражающее свойство геометрической фигуры, называется *теоремой*. Правильность утверждения о свойстве той или иной геометрической фигуры устанавливается путём рассуждения, которое называется *доказательством*. Вспомогательное утверждение, необходимое для доказательства какой-нибудь теоремы, называется *леммой*. Объяснение смысла нового понятия (фигуры или отношения фигур) через уже известные понятия, называется *определением.*

Основные геометрические понятия не имеют определений, а их свойства задаются утверждениями, которые называются *аксиомами*. Эти утверждения не доказываются, а используются при доказательстве теорем.

2. Принадлежность и пересечение

Аксиома I. Каждой прямой принадлежат по крайней мере две точки. Существуют три точки, не лежащие на одной прямой.

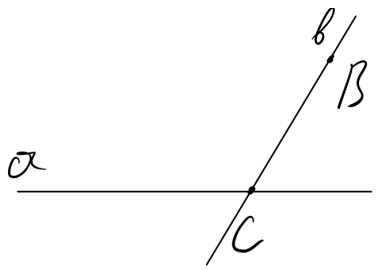
Если точка *A принадлежит* прямой *a,* можно также сказать, что прямая *a проходит через* точку *A.*

Аксиома II. Каковы бы ни были две точки, существует и притом только одна прямая, проходящая через эти точки.

Две точки однозначно указывают конкретную прямую, поэтому прямую можно обозначать двумя точками, лежащими на ней. Например, прямая *AB.*

Определение 1. Прямые *a* и *b пересекаются* в точке *C,* если точка *C* принадлежит и прямой *a,* и прямой *b.* Точка *C* называется *точкой пересечения* прямых *a* и *b.*

Теорема 1. Через каждую точку данной прямой можно провести прямую, пересекающую данную.



Доказательство. Пусть *a* – данная прямая, отметим на ней произвольную точку *C.* По аксиоме I существует точка *B,* не лежащая на прямой a. Проведём через точки *B* и *C* прямую *b* (акс. II). Прямая *b* проходит через точку *B,* не лежащую на прямой *a,* значит, прямая *b* отличается от *a,* но имеет с ней общую точку *C.* Это и означает, что прямые *a* и *b* пересекаются в точке *C* (опр. 1). Теорема доказана.

Введём обозначения: ¬ – *отрицание некоторого утверждения;* ⊗ – *противоречие.*

Теорема 2. Две прямые могут пересекаться только в одной точке.
Доказательство. Допустим, что две прямые пересекаются в двух или более точках (¬). Тогда через эти две точки (или какие-нибудь две точки из всех точек пресечения) проходят две различные прямые (опр. 1), но это противоречит аксиоме II ⊗. Значит две прямые не могут пересекаться в двух и более точках. Следовательно, две прямые могут пересекаться только в одной точке. Теорема доказана.

3. Отрезок

Аксиома III. Из трёх точек на прямой одна и только одна лежит между двумя другими.

Если точка *B лежит между* точками *A* и *C,* можно также сказать, что точки *A* и *C лежат по разные стороны* от точки *B,* или что точка *B разделяет* точки *A* и *C.*

Если точка *B* разделяет *A* и *C*, то точка *C* уже не разделяет *A* и *B* (по аксиоме III только одна точка лежит между двумя другими). Поэтому можно дать ещё одно определение.

Определение 2. Точки *A* и *B лежат по одну сторону* от точки *C,* если они лежат на одной прямой с *C,* и не разделяются точкой *C.*

Определение 3. Пусть на прямой *a* лежат точки *A* и *B. Отрезком AB* называется часть прямой *a,* которая состоит из всех точек этой прямой, лежащих между точками *A* и *B.* Точки *A* и *B* называются *концами отрезка AB.*

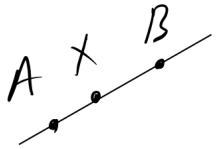
Из определения следует, что концы отрезка не принадлежат отрезку. Если точка *C* принадлежит отрезку *AB,* то говорят также, что отрезок *AB содержит* точку *C.*

Аксиома IV. Каковы бы ни были две точки *A* и *B,* существует отрезок *AB.* Каждому отрезку принадлежит положительное действительное число, называемое *длиной* отрезка. Если точка *C* лежит на отрезке *AB,* то длина отрезка *AB* равна сумме длин отрезков *AC* и *BC.*

Определение 4. Отрезки, не обязательно различные, называются *равными*, если равны их длины. Из двух неравных отрезков *больше* тот у которого больше длина, *меньше* тот у которого меньше длина.

Определение 5. Пусть на прямой *a* лежат точки *A* и *B. Полупрямой* или *лучом AB* называется часть прямой, которая состоит из всех точек прямой, лежащих вместе с точкой *B* по одну сторону от точки *A.* Точка *A* называется *начальной точкой* полупрямой.

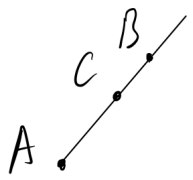
Теорема 3. Отрезок *AB* является частью полупрямой *AB,* то есть каждая точка отрезка *AB* является точкой полупрямой *AB.*
Доказательство. Пусть *X* – некоторая точка на отрезке *AB.* По определению отрезка точка *X* лежит между точками *A* и *B.* Следовательно, точка *A* не разделяет точки *X* и *B* (по аксиоме III только одна точка из трёх лежит между двумя другими и в данном случае это точка *X*), а это и означает, что *X* и *B* лежат по одну сторону от точки *A* (опр. 2). Следовательно, по определению полупрямой точка *X* принадлежит полупрямой *AB.* Теорема доказана.



Аксиома V. Каково бы ни было положительное число d, на данной полупрямой из её начальной точки можно отложить и притом только один отрезок длины d.

Из аксиом V и IV следует, что *на любой полупрямой можно отложить отрезок, равный данному.*

Теорема 4. Если на полупрямой AB из её начальной точки A отложить отрезок AC, меньший отрезка AB, то точка C будет лежать между точками A и B. Если отложить отрезок AC, больший AB, то точка B будет лежать между A и C.
Доказательство. Рассмотрим случай, когда отрезок AC меньше AB. Точка A не может лежать между точками B и C, потому что A начальная точка полупрямой AB (опр. 5 и 2). Если бы точка B лежала между A и C (¬), то по аксиоме IV $AB + CB = AC$, а, значит, $AC > AB$ (по свойству положительных чисел), но по условию теоремы $AC < AB$ ⊗. Значит, точка B не лежит между A и C. Но одна из трёх точек на прямой должна лежать между двумя другими (акс. III), значит, точка C лежит между A и B.



Случай, когда отрезок AC больше AB рассматривается аналогично. Теорема доказана.

Теорема 5. На каждой полупрямой AB есть неограниченное количество точек, как лежащих между точками A и B, так и не лежащих между ними.
Доказательство. На полупрямой AB существуют отрезки AX_1, AX_2, AX_3, AX_4, … длины которых меньше длины AB (акс. VI). При этом по теореме 4 точки X_1, X_2, X_3, X_4, … лежат между точками A и B. Поскольку существует неограниченное количество чисел больших нуля и меньших длины отрезка AB, то таких точек на прямой тоже неограниченное количество.

Теперь, откладывая на полупрямой AB отрезки AY_1, AY_2, AY_3, AY_4, … длины которых больше длины AB, получаем точки Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, … По теореме 4 точка B лежит между точками A и Y_1, A и Y_2, A и Y_3, и так далее, значит сами точки Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, … не лежат между A и B (акс. III). Поскольку существует сколько угодно чисел больших длины AB, то и точек Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, … тоже сколько угодно. Теорема доказана.

Определение 6. Точка C, принадлежащая отрезку AB, называется *серединой* отрезка AB, если $AC = BC$.

Теорема 6. У любого отрезка есть единственная середина.
Доказательство. Пусть AB – произвольный отрезок. Отложим на луче AB отрезок AC, длина которого равна половине длины AB (акс. V). Так как $AC < AB$, то по теореме 4 точка C лежит между точками A и B, то есть принадлежит отрезку AB

(опр. 3). Тогда по аксиоме IV $AB = AC + BC$. Следовательно, $BC = AB - AC = AB - \frac{AB}{2} = \frac{AB}{2} = AC$. Значит, точка C есть середина отрезка AB (опр. 6).

Докажем единственность середины. Допустим, что на отрезке AB существует ещё одна середина C_1 (¬). Отрезок AB является частью полупрямой AB (т. 3), следовательно, точка C_1 принадлежит полупрямой AB. По определению середины $AC_1 = BC_1$, а по аксиоме IV $AC_1 + BC_1 = AB$. Из этого следует, что отрезок AC_1 равен половине отрезка AB. Но на полупрямой AB можно отложить только один отрезок с длиной, равной половине длины AB (акс. V) и это отрезок AC ⊗. Следовательно, точка C является единственной серединой отрезка AB. Теорема доказана.

Следствие. Если точка C принадлежит прямой AB и $AC = CB$, то точка C является серединой отрезка AB.
Доказательство. Требуется доказать, что точка C принадлежит отрезку AB. Допустим, что это не так (¬). Тогда точка C не лежит между точками A и B (опр. 3). Если точка A лежит между точками C и B, то по аксиоме IV $CB = CA + AB$, что противоречит условию $AC = CB$. Если точка B лежит между A и C, то $AC = CB + AB$, что также противоречит условию $AC = CB$. Значит, точка C лежит между точками A и B (акс. III) ⊗. Таким образом, точка C принадлежит отрезку AB и с учётом условия $AC = CB$ является его серединой (опр. 6). Следствие доказано.

4. Полуплоскость

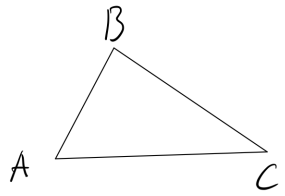
Определение 7. Отрезок AB пересекается с прямой a, не совпадающей с прямой AB, в точке C, если точка C принадлежит и отрезку AB, и прямой a.

Поскольку прямая AB и прямая a могут пересекаться только в одной точке, то и отрезок AB пересекается с прямой a только в одной точке.

Приведём одну из пространственных аксиом, указывающую на существование новой фигуры – плоскости. До §21 все доказываемые утверждения формулируются для фигур на некоторой плоскости.

Аксиома C_3. Если две различные прямые имеют общую точку, то через них можно провести плоскость, и притом только одну.

Определение 8. Пусть дана прямая a и не лежащая на ней точка A. *Полуплоскостью* точки A называется часть плоскости, которая состоит из точки A и всех точек плоскости, кроме точек прямой a, для которых соединяющий их с A отрезок не пересекает прямую a.

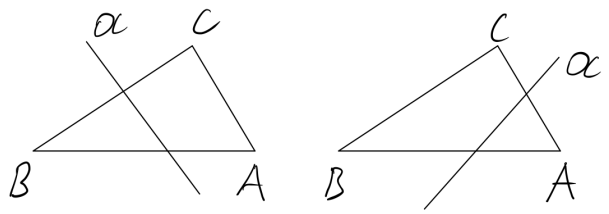


Аксиома VI. Прямая, принадлежащая плоскости, разбивает плоскость на две полуплоскости так, что каждая точка плоскости, кроме точек этой прямой, попадает либо в одну полуплоскость, либо в другую.

Определение 9. *Треугольником* называется фигура, которая состоит из трёх точек, не лежащих на одной прямой, и трёх попарно соединяющих их отрезков. Эти точки называются *вершинами* треугольника, а отрезки – *сторонами*.

Треугольник обозначается указанием его вершин, например, Δ*ABC*. Существование треугольника непосредственно следует из аксиом I и IV.

Теорема 7 (Паш, 1882). Если прямая *a,* не проходящая ни через одну из вершин



треугольника *ABC,* пересекает его сторону *AB,* то она пересекает и притом только одну из двух других сторон, *BC* или *AC.*
Доказательство. Прямая *a* разбивает плоскость на две полуплоскости. Поскольку отрезок *AB* пересекается с прямой *a,* по определению 8 точка *B* не лежит в полуплоскости точки *A*. Точка *C* лежит либо в полуплоскости точки *A,* либо в полуплоскости точки *B* (акс. VI). Если точка *C* лежит в полуплоскости точки *A,* то по определению 8 отрезок *AC* не пересекается с прямой *a*, а отрезок *BC* пересекается с этой прямой (иначе точка *C* лежала бы ещё и в полуплоскости точки *B*, но это противоречит аксиоме VI). Если точка *C* лежит в полуплоскости точки *B,* то отрезок *BC* не пересекается с прямой *a,* а отрезок *AC* пересекается. В обоих случаях прямая *a* пересекает и притом только один из отрезков *AC* или *BC.* Теорема доказана.

Лемма 1. Если прямая *a* пересекается с прямой *b* в точке *A,* то любой отрезок прямой *a* пересекается с прямой *b* тогда и только тогда, когда этот отрезок содержит точку *A.*
Доказательство. Если отрезок содержит точку *A,* принадлежащую прямой *b,* то он пересекает прямую *b* по определению 7.

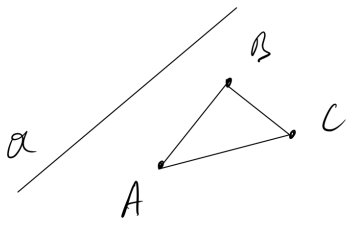
Допустим, что некоторый отрезок прямой *a* не содержит точку *A,* но пересекается с прямой *b* в точке *B,* отличной от *A* (¬). Отрезок является частью прямой *a* (опр. 3),

следовательно, точка *B* тоже является точкой прямой *a.* Таким образом, прямые *a* и *b* пересекаются в двух точках – *A* и *B,* что противоречит теореме 2 ⊗.

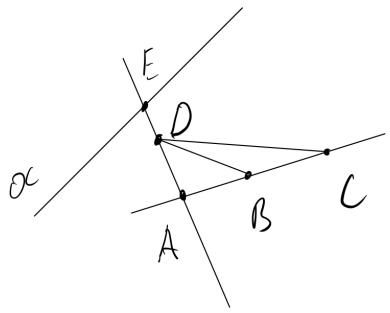
Следовательно, отрезок прямой *a* может пересекаться с прямой *b*, только если содержит точку *A.* Лемма доказана.

Теорема 8.1. Если две точки лежат в одной полуплоскости относительно данной прямой, то отрезок, соединяющий эти точки, не пересекает данную прямую.

Доказательство. Пусть *a* – данная прямая и *A* точка, не лежащая на прямой *a.* Пусть некоторые точки *B* и *C* лежат в полуплоскости точки *A.* Докажем, что отрезок *BC* не пересекается с прямой *a*. Будем рассматривать два случая, когда точки *B* и *C* лежат на одной прямой с точкой *A* и когда они не лежат на одной прямой с точкой *A.*



Сначала рассмотрим случай, когда точки *A, B, C* не лежат на одной прямой. Тогда существует треугольник *ABC* (опр. 9). Если бы прямая *a* пересекала сторону *BC* треугольника, то по теореме 7 она должна была пересекать либо сторону *AB,* либо сторону *AC*. Но поскольку точки *B* и *C* лежат в полуплоскости точки *A*, прямая *a* по определению полуплоскости не пересекает отрезки *AB* и *AC*. Следовательно, не пересекает она и отрезок *BC*.



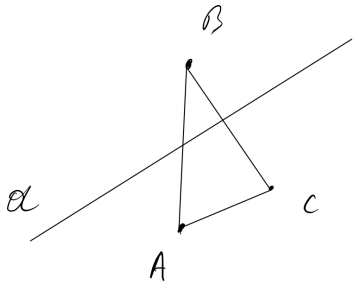
Случай когда все три точки лежат на одной прямой рассматривать немного сложнее. Пусть *E* произвольная точка прямой *a,* не являющаяся точкой пересечения прямых *a* и *AC*. Тогда прямая *AE* не совпадает с прямой *AC*. Отложим на полупрямой *AE* отрезок *AD*, меньший *AE*. По теореме 4 точка *D* лежит между точками *A* и *E*, следовательно, точка *E* не лежит между точками *A* и *D*, и не принадлежит отрезку *AD* (опр. 3). Тогда по лемме 1 отрезок *AD* не пересекает прямую *a*, и, следовательно, точка *D* лежит в полуплоскости точки *A*, но не принадлежит прямой *AC*.

Рассмотрим треугольник *ADC*. Прямая *a* не пересекает отрезок *AD* и не пересекает отрезок *AC*, потому что точки *D* и *C* лежат в полуплоскости точки *A*. Тогда с помощью теоремы 7 заключаем, что прямая *a* не пересекает и отрезок *DC*. Аналогично рассматривая треугольник *ABD* заключаем, что прямая *a* не пересекает и его сторону *DB*. Наконец, рассмотрим треугольник *DBC*. Мы доказали, что прямая *a* не пересекает стороны *DB* и *DC*, а, значит, она не пересекает и сторону *BC*.

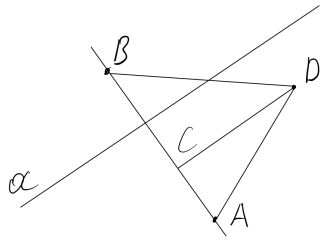
Итак, в обоих случаях если точки *B* и *C* лежат в одной полуплоскости относительно прямой *a*, то прямая *a* не пересекает отрезок *BC*. Теорема доказана.

Следствие. Если точки *A* и *B* не лежат на прямой *a*, и отрезок *AB* не пересекает прямую *a*, то полуплоскости точек *A* и *B* совпадают, то есть состоят из одних и тех же точек.
Доказательство. Так как отрезок *AB* не пересекается с прямой *a*, можно сказать, что точка *B* лежит в полуплоскости точки *A* (опр. 8). Если некоторая точка *C* лежит в полуплоскости *A*, то по теореме 8.1 отрезок *BC* не пересекается с прямой *a*, а значит, можно сказать, что точка *C* лежит и в полуплоскости точки *B*. Аналогично доказывается обратное, что если точка *C* лежит в полуплоскости точки *B*, то она лежит и в полуплоскости точки *A*. Следствие доказано.

Теорема 8.2. Если две точки лежат в разных полуплоскостях относительно данной прямой, то отрезок, соединяющий эти точки, пересекает данную прямую.
Доказательство. Пусть *a* – данная прямая, *A* – точка, не лежащая на прямой *a*. Некоторая точка *C* лежит в полуплоскости точки *A*, а точка *B* не лежит. Тогда по определению полуплоскости отрезок *AC* не пересекается с прямой *a*, а отрезок *AB* пересекается. Докажем, что отрезок *BC* пересекается с прямой *a*.



Снова рассмотрим два случая. Первый случай, когда точки *A, B, C* не лежат на одной прямой. Тогда существует треугольник *ABC*, прямая *a* пересекает его сторону *AB* и не пересекает сторону *AC*, значит, по теореме 7 прямая *a* пересекает сторону *BC*.



Рассмотрим случай, когда точки *A, B, C* лежат на одной прямой. Пусть точка *D* лежит в полуплоскости точки *A*, но не на прямой *AC*. Её можно построить точно так же как в доказательстве теоремы 7.1. Значит, существует треугольник *DBA*, в котором прямая *a* не пересекает сторону *DA*, но пересекает сторону *AB*. Тогда прямая *a* пересекает сторону *DB* (т. 7).

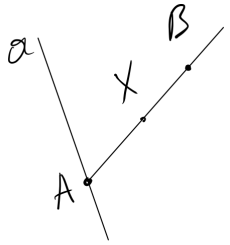
В треугольнике *DBC* прямая *a* пересекает *DB* и, по теореме 8.1, не пересекает сторону *DC* (ведь точки *D* и *C* лежат в полуплоскости точки *A)*. Значит, прямая *a* пересекает сторону *BC* треугольника *DBC* (т. 7). Теорема доказана.

Из теоремы 8.2 следует, что если отрезок *BC* не пересекает прямую *a*, то точки *B* и *C* лежат в одной полуплоскости относительно прямой *a*. Ведь если бы они лежали в разных полуплоскостях, то отрезок *BC* пересекал бы прямую *a*. Значит, можно сформулировать теорему 8 следующим образом.

Теорема 8. Две точки, не лежащие на данной прямой, принадлежат одной полуплоскости тогда и только тогда, когда соединяющий их отрезок не пересекается с данной прямой.
Доказательство. Следует из теорем 8.1 и 8.2. Теорема доказана.

5. Полупрямая

Теорема 9. Пусть через начальную точку *A* полупрямой *AB* проведена прямая *a*, отличная от прямой *AB*. Тогда полупрямая *AB* состоит из тех и только тех точек прямой *AB*, которые лежат в одной полуплоскости с точкой *B* относительно прямой *a*.
Доказательство. Возьмём произвольную точку *X* на полупрямой *AB*. Точки *X* и *B* лежат по одну сторону от точки *A* (опр. 5). Следовательно, точка *A* не принадлежит отрезку *XB* (опр. 3). Значит, отрезок *XB* не пересекает прямую *a* (лемма 1). Так как отрезок *XB* не пересекается с прямой *a*, то точка *X* лежит в одной полуплоскости с точкой *B* относительно прямой *a* (т. 8).



Если *X* – точка прямой *AB*, лежащая в одной полуплоскости с точкой *B*, то отрезок *BX* не пересекается с прямой *a* (т. 8). Следовательно, точка *A* не принадлежит отрезку *BX* (лемма 1). Значит, точки *B* и *X* лежат по одну сторону от точки *A*, то есть точка *X* принадлежит полупрямой *AB* (опр. 5). Теорема доказана.

Теорема 10. Если через конец *A* отрезка *AB* провести прямую *a*, отличную от прямой *AB*, то весь отрезок *AB* будет в одной полуплоскости относительно прямой *a*. Именно, он будет в полуплоскости точки *B*.
Доказательство. Следует из того, что отрезок *AB* является частью полупрямой *AB* (теорема 3) и теоремы 9. Теорема доказана.

Лемма 2. Пусть *A* некоторая точка прямой *a*. На прямой *a* существуют точки *B* и *C*, лежащие по разные стороны от точки *A*.
Доказательство. Отметим на прямой *a* ещё одну точку – *B* (акс. I). На полупрямой *BA* отложим отрезок *BC*, больше отрезка *BA* (акс. IV), тогда точка *A* будет лежать между точками *B* и *C* (т. 4). Лемма доказана.

Теорема 11. Точка *A*, лежащая на прямой *a*, разбивает эту прямую на две полупрямые с начальной точкой *A*. Точки одной полупрямой не разделяются точкой *A*, а точки различных полупрямых разделяются этой точкой.
Доказательство. Проведём через точку *A* прямую *b*, отличную от прямой *a* (т. 1). По лемме 2 на прямой *a* существуют точки *B* и *C*, лежащие по разные стороны от точки *A*. Следовательно, точка *A* принадлежит отрезку *BC* (опр. 3), который пересекает прямую *b* в точке *A* (опр. 7). Значит, точки *B* и *C* лежат в разных полуплоскостях

относительно прямой *b* (т. 8). Тогда все точки прямой *a*, лежащие в одной полуплоскости с точкой *B* составляют полупрямую *AB*, а все точки прямой *a*, лежащие в полуплоскости точки *C* составляют полупрямую *AC* (т. 9). Прямые *a* и *b* имеют только одну общую точку (т. 2), следовательно, каждая точка прямой *a*, кроме точки *A*, лежит в одной из двух полуплоскостей, на которые разбивает плоскость прямая *b* (акс. VI), и принадлежит либо полупрямой *AB,* либо *AC*.

Пусть точки *E* и *D* лежат на прямой *a* по одну сторону от точки *A*. Тогда точка *A* не лежит между точками *E* и *D* (опр. 2), а, значит, отрезок *ED* не содержит точку *A* (опр. 3) и, следовательно, не пересекается с прямой *b* (лемма 1), следовательно, точки *E* и *D* принадлежат одной полуплоскости относительно прямой *b* (либо полуплоскости точки *B,* либо *C*) (акс. VI), а, значит, и одной полупрямой с начальной точкой *A* – *AB* или *AC* (т. 9). Если точки *E* и *D* разделяются точкой *A*, то отрезок *ED* пересекает прямую *b*, следовательно, точки *E* и *D* лежат в разных полуплоскостях относительно прямой *b*, а, значит, принадлежат разным полупрямым с начальной точкой *A*. Теорема доказана.

Из теоремы 11 следует, что *если на прямой AB точки B и C лежат по одну сторону от точки A, то полупрямые AB и AC совпадают.*

Теорема 12. Если точка *B* лежит на полупрямой *AC*, то отрезок *AB* является частью полупрямой *AC,* то есть любая точка отрезка *AB* принадлежит полупрямой *AC*.
Доказательство. Пусть *X* – произвольная точка отрезка *AB*. Тогда *X* лежит между точками *A* и *B* (опр. 3), значит, точка *A* не лежит между точками *B* и *X* (акс. III), и точки *B* и *X* лежат по одну сторону от точки *A* (опр. 2). Тогда по теореме 11 точки *B* и *X* принадлежат одной и той же полупрямой, то есть полупрямой *AC*. Теорема доказана.

Теорема 13. Пусть на полупрямой *AD* отложены отрезки *AB* и *AC*. Тогда если $AC < AB$, то точка *C* лежит между точками *A* и *B*, если $AC > AB$, то точка *B* лежит между точками *A* и *C*.
Доказательство. Доказательство дословно повторяет доказательство теоремы 4, только при обосновании того, что точка *A* не может лежать между точками *B* и *C* теперь надо сослаться на теорему 11. Теорема доказана.

Определение 9. Полупрямые с общей начальной точкой и состоящие из точек одной прямой называются *дополнительными*.

Из теоремы 11 следует, что *если точка B прямой AB лежит между точками A и C (то есть принадлежит отрезку AC), то полупрямые BA и BC дополнительные.*

Теорема 14. У каждой полупрямой есть дополнительная полупрямая.

Доказательство. По определению полупрямая является частью прямой, и начальная точка полупрямой разбивает эту прямую на две полупрямые (т. 11). Вторая и является дополнительной к первой (опр. 9). Теорема доказана.

Теорема 15. Если точка X принадлежит отрезку AB, то отрезок AX является частью отрезка AB, то есть любая точка отрезка AX является точкой отрезка AB.
Доказательство. X – точка отрезка AB и, следовательно, X лежит на полупрямой AB (т. 3). Пусть Y – произвольная точка отрезка AX, тогда Y лежит между точками A и X (опр. 3), значит, точка A не лежит между точками X и Y (акс. III), и точки X и Y лежат по одну сторону от точки A (опр. 2). Тогда по теореме 11 точки X и Y принадлежат одной полупрямой, то есть полупрямой AB. Следовательно, отрезок AY является частью полупрямой AB (т. 12).

По аксиоме IV $AB = AX + XB$, следовательно, $AX < AB$. Аналогично доказывается, что $AY < AX$. Из двух неравенств следует, что $AY < AB$. Тогда по теореме 4 точка Y лежит между точками A и B, следовательно, она принадлежит отрезку AB (опр. 3). Теорема доказана.

Теорема 16. Если точки A и B лежат в одной полуплоскости относительно прямой a, то весь отрезок AB лежит в одной полуплоскости относительно прямой a.
Доказательство. Точки A и B лежат в одной полуплоскости относительно прямой a, значит, на отрезке AB нет точек, принадлежащих прямой a (т. 11). Пусть X – произвольная точка отрезка AB. По теореме 15 отрезок AX является частью отрезка AB. Так как на отрезке AB нет точек пересечения с прямой a, то и на отрезке AX нет точек пересечения с прямой a, следовательно, точка X лежит в полуплоскости точки A (т. 11). Теорема доказана.

6. Координаты на прямой

Определение 10. Пусть a – действительное число, тогда $-a$ это такое число, что $-a + a = 0$. Число $-a$ называется *противоположным* a.

Пример. Если $a = 5$, то $-a = -5$, если $a = -5$, то $-a = 5$, если $a = 0$, то $-a = 0$.

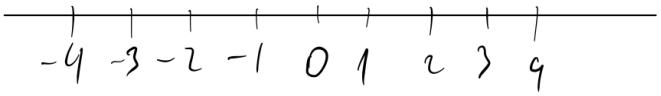
Определение 11. Число, называемое *модулем числа* a (обозначается $|a|$), равно числу a, если a положительное, равно $-a$, если a отрицательное, и равно нулю, если a равно нулю.

Пример. $|5| = 5$; $|-5| = 5$.

Пусть O – некоторая точка прямой, поставим ей в соответствие число 0. Точка O разбивает прямую на две полупрямые, одну из которых мы будем называть «положительной», а другую «отрицательной». Если некоторая точка A принадлежит положительной полупрямой, то поставим ей в соответствие число, равное длине

отрезка OA. Если точка A принадлежит отрицательной полупрямой, то поставим ей в соответствие отрицательное число, противоположное длине отрезка OA.

Определение 12. Числа, поставленные в соответствие точкам прямой по указанному правилу, называются *координатами* точек прямой. Точка, которой соответствует число 0, называется *началом координат.*



Теорема 17. Длина отрезка AB равна модулю разности координат точек B и A на прямой AB.
Доказательство. Будем обозначать координату точки A буквой a, а точки B буквой b. То есть требуется доказать, что $AB = |b - a|$.

Заметим, что если $b > a$, то разность $b - a$ положительна. Тогда по определению модуля $|b - a| = b - a$. Если $a > b$, то разность $b - a$ отрицательна и $|b - a| = -(b - a) = -b + a = a - b$.

Рассмотрим все варианты расположения точек A и B относительно начала координат. Если один из концов отрезка AB, например A, является началом координат, то по определению 12 $|b| = AB$, следовательно, $AB = |b - 0| = |b - a|$.

Если точка A принадлежит положительной полупрямой, а B отрицательной, то $a = OA$ и $b = -OB$ (опр. 12), следовательно, длина $OA = a$, длина $OB = -b$. Точки A и B разделяются точкой O, значит, по аксиоме IV $AB = OA + OB = a + (-b) = a - b = |b - a|$. Если точка A принадлежит отрицательной полупрямой, а точка B положительной, то $AB = OA + OB = -a + b = b - a = |b - a|$.

Если точки A и B принадлежат положительной полупрямой, то либо A лежит между O и B, либо B между O и A (точка O не лежит между A и B так как является начальной точкой полупрямой). Если точка B лежит между O и A, то по аксиоме IV $OA = OB + AB$, следовательно, $AB = OA - OB = a - b = |b - a|$. Если A лежит между B и O, то $AB = OB - OA = b - a = |b - a|$.

Если A и B принадлежат отрицательной полупрямой, и B лежит между O и A, то $AB = OA - OB = -a - (-b) = -a + b = b - a = |b - a|$. Если A лежит между O и B, то $AB = OB - OA = -b - (-a) = a - b = |b - a|$. Теорема доказана.

Введение координат на прямой устанавливает *взаимно однозначное соответствие* между точками прямой и действительными числами. То есть каждому числу соответствует одна точка на прямой, и каждой точке соответствует одно число.

Действительно, какова бы ни была точка *A* прямой, существует отрезок *OA* определённой длины *d* (аксиома IV). Если точка *A* лежит на положительной полупрямой, то ей соответствует число *d*, если А на отрицательной полупрямой, то ей соответствует –*d.* Наоборот, каково бы ни было число *d* по аксиоме V можно отложить от точки *O* отрезок *OA* с длиной |*d*| (если *d* отрицательное, то на отрицательной полупрямой, а если положительное, то на положительной) и получить соответствующую *d* точку *A*. Таким образом, мы поставили в соответствие каждой точке число, а каждому числу его точку.

Обратим внимание на разницу в терминологии. В учебниках алгебры отрезком [*a; b*] называется числовой промежуток, который включает свои концы, то есть числа *a* и *b* в алгебре являются частью отрезка [*a; b*]. В геометрии концы отрезка не считаются точками отрезка.

Определение 13. Пусть *a* и *b* два числа. Число $\frac{a+b}{2}$ называется *полусуммой* *a* и *b*.

Лемма 3. Если |*a*| = |*b*|, то либо *a* = *b* (если *a* и *b* одного знака), либо *a* = –*b* (если *a* и *b* разных знаков).
Доказательство. Рассмотрим четыре случая. 1. Если *a* < 0 и *b* < 0, то по определению модуля –*a* = –*b*, следовательно, *a* = *b*. 2. Если *a* < 0 и *b* > 0, то –*a* = *b*, следовательно, *a* = –*b*. 3. Если *a* > 0 и *b* > 0, то *a* = *b*. 4. Если *a* > 0 и *b* < 0, то *a* = –*b*. Лемма доказана.

Теорема 18. Координата середины отрезка равна полусумме координат его концов.
Доказательство. Пусть точка *C* – середина отрезка *AB*. Обозначим *a* – координату точки *A*, *b* – координату точки *B*, *c* – координату *C*. По определению середины *AC* = *BC*, тогда по теореме 17 |*c* – *a*| = |*c* – *b*|. Числа (*c* – *a*) и (*c* – *b*) либо одного знака, либо разных. Тогда по лемме 3 либо *c* – *a* = *c* – *b,* либо *c* – *a* = – (*c* – *b)*. В первом случае получается, что *a* = *b*, что невозможно так как точки *A* и *B* различны. Значит, *c* – *a* = – (*c* – *b*), откуда получаем $c = \frac{a+b}{2}$. Теорема доказана.

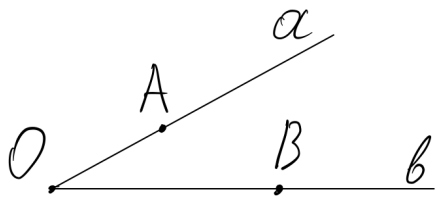
Теорема 19. Пусть *AB* некоторый отрезок и координата *a* точки *A* меньше чем координата *b* точки *B*. Тогда если точка *C* принадлежит отрезку *AB*, то её координата *c* принадлежит числовому интервалу (*a; b*). Обратно, если число *c* принадлежит интервалу (*a; b*), то точка *C* с координатой *c* принадлежит отрезку *AB*.
Доказательство. Докажем первое утверждение теоремы. Если *C* точка отрезка *AB*, то по аксиоме IV *AB* = *AC* + *BC*. Тогда по теореме 17 |*b* – *a*| = |*c* – *a*| + |*c* – *b*|. Докажем, что это равенство выполняется только если *a* < *c* < *b*. Допустим, что *c* меньше *a*, а, значит, и *b*, тогда имеем *b* – *a* = *a* – *c* + *b* – *c*, то есть –*a* = *a* – 2*c*, что равносильно *a* = *c.* Но это невозможно, так как точка *C* не совпадает с точкой *A*. Допустим, что *c* больше *b*, а, значит, и больше *a*. Тогда *b* – *a* = *c* – *a* + *c* – *b*, то есть *b* = *c*, что также невозможно. Значит, выполняется условие *a* < *c* < *b*.

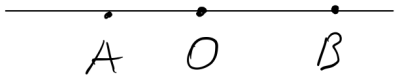
Докажем второе утверждение. Пусть число c принадлежит интервалу $(a; b)$, то есть выполняется неравенство $a < c < b$. Допустим, точка A лежит между C и B. Тогда $BC = AC + AB$, то есть $|c - b| = |c - a| + |b - a|$. Раскрываем модули с учётом условия $a < c < b$, получаем $b - c = c - a + b - a$, или $c = a$. Допустим теперь, что точка B лежит между A и C. Тогда $AC = AB + CB$, то есть $|c - a| = |b - a| + |c - b|$, что при указанном неравенстве означает $c - a = b - a + b - c$, или $c = b$. Таким образом, только точка C может лежать между A и B, следовательно, точка C принадлежит отрезку AB (опр. 3). Теорема доказана.

§2. Аксиомы VII-X

1. Угол

Определение 14. *Углом* называется фигура, которая состоит из двух различных полупрямых с общей начальной точкой. Эта точка называется *вершиной угла*, а полупрямые – *сторонами угла*.



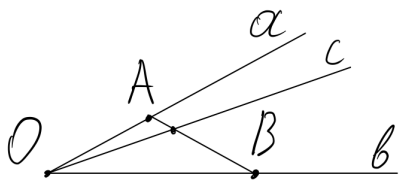


Пусть прямые a и b пересекаются в точке O. Точка O разбивает каждую из прямых на две полупрямые (теорема 11). Пусть, например, OA – одна из полупрямых прямой a, а OB – полупрямая прямой b. Тогда по определению они образуют угол AOB.

Определение 15. Если стороны угла являются дополнительными полупрямыми, то угол называется *развёрнутым*.

Существование развёрнутых углов следует из существования дополнительных полупрямых. Угол обозначается либо указанием его вершины ($\angle O$) либо указанием его сторон ($\angle ab$) либо указанием вершины и двух точек на сторонах угла ($\angle AOB$) – при этом вершина пишется посередине.

Определение 16. Говорят, что луч c *проходит между* сторонами угла (ab), если он исходит из вершины угла (ab) и пересекает какой-нибудь отрезок с концами на сторонах угла. В случае развёрнутого угла, считают, что любой луч, исходящий из его вершины, и отличающийся от его сторон, проходит между сторонами угла.



Теорема 20. Какой бы ни был угол (*ab*), существует луч *c*, проходящий между сторонами (*ab*).
Доказательство. Рассмотрим случай развёрнутого угла с вершиной *O*. Его стороны лежат на одной прямой (опр. 15), и через точку *O* можно провести какую-нибудь прямую *b*, пересекающую прямую развёрнутого угла (т. 1). Точка *O* образует на прямой *b* два луча (т. 11), оба из которых проходят между сторонами развёрнутого угла (опр. 16).

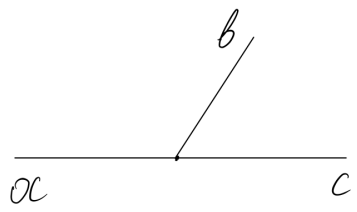
В случае неразвёрнутого угла отметим какую-нибудь точку *A* на стороне *a* и точку *B* на стороне *b* (по теореме 5 на полупрямой есть сколько угодно точек), тогда существует отрезок *AB* (акс. IV). Пусть *C* – некоторая точка отрезка *AB* (по определению отрезка он состоит из точек), проведём через неё прямую *OC* (акс. II). Луч *OC* проходит между сторонами угла (*ab*), так как пересекает отрезок *AB* с концами на сторонах угла (*ab*) (опр. 16). Теорема доказана.

Аксиома VII. Каждому углу принадлежит положительное действительное число, называемое градусной мерой. Развёрнутый угол равен 180°. Если луч *c* проходит между сторонами угла (*ab*), то градусная мера угла (*ab*) равна сумме градусных мер углов (*ac*) и (*bc*).

Знак ° читается как «градусов» и означает, что некоторое число является градусной мерой угла.

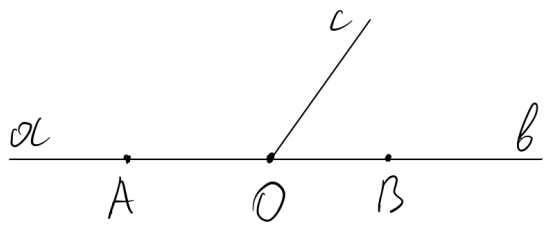
Определение 17. Углы, не обязательно различные, называются *равными*, если равны их градусные меры. Из двух неравных углов *больше* тот у которого больше градусная мера, *меньше* тот у которого меньше градусная мера.

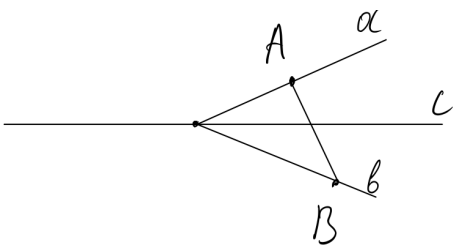
Теорема 21. Градусная мера любого неразвёрнутого угла меньше 180°.
Доказательство. Пусть (*ab*) данный неразвёрнутый угол, тогда полупрямая *b* не является дополнительной к *a* (опр. 15). Обозначим *c* полупрямую дополнительную к *a* (т. 14). Тогда угол (*ac*) развёрнутый (опр. 15) и луч *b* проходит между его сторонами (опр. 16). Следовательно, по аксиоме VII для градусных мер углов выполняется равенство: (*ac*) = (*ab*) + (*bc*). Из этого равенства по свойству положительных чисел следует, что (*ab*) < (*ac*), то есть градусная мера угла (*ab*) меньше градусной меры развёрнутого угла (*ac*), равной 180°. Теорема доказана.



Следствие 1. Любой неразвёрнутый угол меньше развёрнутого.
Следствие 2. Если градусная мера угла равна 180°, то угол является развёрнутым.

Теорема 22. Если луч *c* проходит между сторонами угла (*ab*), то прямая, содержащая луч *c*, разделяет стороны угла, то есть полупрямые *a* и *b* лежат в разных полуплоскостях относительно прямой, содержащей луч *c*.
Доказательство. Сначала рассмотрим случай, когда угол (*ab*) развёрнутый. Тогда его стороны являются дополнительными полупрямыми (опр. 9), точки которых разделяются вершиной угла (т. 11). Тогда любой отрезок *AB* с концами на разных сторонах углах, содержит вершину угла (опр. 3). Луч *c* по определению 16 исходит из вершины угла. Поэтому отрезок *AB* пересекается с прямой, содержащей луч *c*, в вершине угла (лемма 1). Следовательно, точки *A* и *B* лежат в разных полуплоскостях относительно прямой, содержащей луч *c* (т. 8).

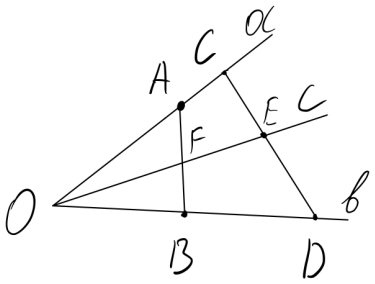




Пусть теперь угол (*ab*) неразвёрнутый. Так как луч *c* проходит между сторонами угла (*ab*), то он пересекает некоторый отрезок *AB* с концами на сторонах угла (опр. 16). Так как отрезок *AB* пересекается с прямой, содержащей луч *c*, то точки *A* и *B* лежат в разных полуплоскостях относительно этой прямой (т. 8).

По теореме 9 полупрямая *a* лежит в одной полуплоскости относительно прямой, содержащей луч *c*, именно в полуплоскости где лежит точка *A*. По той же теореме полупрямая *b* лежит в полуплоскости, которой принадлежит точка *B*. Так как точки *A* и *B* лежат в разных полуплоскостях относительно прямой, содержащей луч *c*, то и полупрямые *a* и *b* лежат в разных полуплоскостях и в случае развёрнутого, и в случае неразвёрнутого угла. Теорема доказана.

Теорема 23. Если луч *c* проходит между сторонами неразвёрнутого угла (*ab*), то он пересекает любой отрезок с концами на сторонах угла (*ab*).
Доказательство. Пусть *CD* произвольный отрезок с концами на сторонах угла (*ab*). По теореме 22 прямая, содержащая луч *c*, разделяет стороны угла, следовательно, точки *C* и *D* лежат в разных полуплоскостях относительно этой прямой. Тогда по теореме 8 прямая, содержащая луч *c*, пересекает отрезок *CD* в некоторой точке *E*. Докажем, что точка *E* лежит на луче *c*, а не на дополнительном к нему луче.



Если луч *c* проходит между сторонами угла (*ab*) то по определению он пересекает некоторый отрезок *AB* с концами на сторонах угла.

Обозначим их точку пересечения *F*.

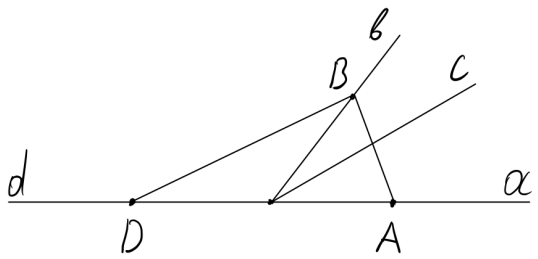
По теореме 9 луч *a* лежит в одной полуплоскости относительно прямой *OD* (*O* – это вершина угла). Значит точки *A* и *C* лежат в одной полуплоскости. Тогда по теореме 10 отрезки *AB* и *CD* тоже лежат в одной полуплоскости относительно прямой *OD* (в полуплоскости своих концов *A* и *C*). Значит, точки *F* и *E* лежат в одной полуплоскости относительно *OD*.

Допустим, что точка *E* лежит на полупрямой дополнительной к *c* (¬). Тогда точки *E* и *F* разделяются точкой *O* (т. 11), и тогда эти точки лежат в разных полуплоскостях относительно прямой *OD* (т. 8), что противоречит тому, что они лежат в одной полуплоскости ⊗. Значит, точка *E* лежит на луче *c*. Теорема доказана.

Аксиома VIII. Каково бы ни было положительное число *α*, меньшее 180, от данной полупрямой в данную полуплоскость (относительно прямой, содержащей полупрямую) можно отложить и притом только один угол с градусной мерой *α*.

Градусные меры углов часто обозначают греческими буквами *α* (альфа), *β* (бета), γ (гамма), θ (тета), ϕ (фи) и т. д.

Теорема 24. Если от полупрямой *a* отложить в одну полуплоскость углы (*ab*) и (*ac*), то либо луч *b* проходит между сторонами угла (*ac*), либо луч *c* проходит между сторонами угла (*ab*).



Доказательство. Обозначим через *d* полупрямую, дополнительную к полупрямой *a* (т. 14). Углы (*db*) и (*dc*) различны и отложены в одну полуплоскость, значит, они не равны (акс. VIII). Следовательно, один из них меньше другого (опр. 17). Пусть, например, угол (*db*) меньше угла (*dc*). Отметим на полупрямых *a, b* и *d* точки *A, B, D* (т. 5). Тогда начальная точка лучей *a, b* и *c* лежит на отрезке *AD* (т. 11).

Прямая, содержащая луч *c*, пересекает сторону *AD* треугольника *DAB*. Поэтому по теореме 7 она пересекает либо сторону *DB* либо сторону *AB*. Точка пересечения лежит на луче *c*, потому что отрезки *DB* и *AB* лежат в полуплоскости точки *B* относительно прямой *DA* (т. 10), а точка *B* лежит на луче *b*, который по условию

лежит в одной полуплоскости с лучом *c*. Таким образом, луч *c* пересекает либо отрезок *DB,* либо отрезок *AB*.

Если бы луч *c* пересекал отрезок *DB* (¬), то он проходил бы между сторонами угла (*db*) (опр. 16). Тогда по аксиоме VII *(dc)* + *(cb)* = *(db)*, а значит ∠(*dc*) < ∠(*db*), но мы рассматриваем случай, когда ∠(*db*) < ∠(*dc*) ⊗. Поэтому луч *c* не пересекает отрезок *DB*, а, значит, пересекает отрезок *AB*. Но это и означает, что луч *c* проходит между сторонами угла (*ab*) (опр. 16).

В случае когда ∠(*dc*) < ∠(*db*) ход доказательства аналогичен. Теорема доказана.

Теорема 25. Если от полупрямой *a* отложить в одну полуплоскость углы (*ab*) и (*ac*), такие что угол (*ac*) меньше угла (*ab*), то луч *c* будет проходить между сторонами угла (*ab*).
Доказательство. По теореме 24 либо луч *b* проходит между сторонами угла (*ac*), либо луч *c* проходит между сторонами угла (*ab*). Допустим, что луч *b* проходит между сторонами угла (*ac*) (¬). Тогда по аксиоме VII *(ab)* + *(bc)* = *(ac)*, а, значит, ∠(*ab*) < ∠(*ac*), но по условию ∠(*ac*) < ∠(*ab*) ⊗. Следовательно, луч *c* проходит между сторонами угла (*ab*). Теорема доказана.

Определение 18. Луч *c*, проходящий между сторонами угла (*ab*), называется *биссектрисой* угла (*ab*), если (*ac*) = (*bc*).

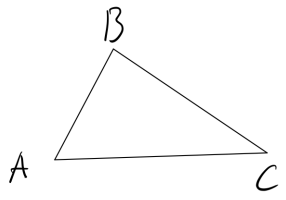
Лемма 4. Если луч *c* проходит между сторонами угла *(ab)*, то луч *c* лежит в одной полуплоскости с лучом *b* относительно прямой, содержащей луч *a*.
Доказательство. Луч *b* лежит в одной полуплоскости относительно прямой, содержащей луч *a* (т. 9). По определению луч *c* пересекает отрезок *AB* с концами на сторонах угла *(ab)* в некоторой точке *E*. Пусть точка *B* лежит на луче *b*. Тогда весь отрезок *AB* лежит в полуплоскости точки *B* (т. 10), а, значит, в полуплоскости луча *b* относительно прямой, содержащей луч *a*. Тогда и точка *E* лежит в этой полуплоскости, а, значит, в ней лежит и луч *c,* проходящий через точку *E* (т. 9). Таким образом, луч *c* лежит в одной полуплоскости с лучом *b*. Лемма доказана.

Теорема 26. У любого угла есть единственная биссектриса.
Доказательство. Пусть (*ab*) данный угол. Отложим от полупрямой *a* в полуплоскость луча *b* угол (*ac*), градусная мера которого равна половине градусной меры угла (*ab*) (акс. VIII). Так как ∠(*ac*) < ∠(*ab*), то по теореме 25 луч *c* проходит между сторонами угла (*ab*). Тогда *(ab)* = *(ac)* + *(bc),* следовательно, *(bc)* = *(ab)* – *(ac)* = *(ab)* – $\frac{(ab)}{2}$ = $\frac{(ab)}{2}$ = *(ac).* Таким образом луч *c* – биссектриса угла (*ab*) (опр. 18).

Докажем единственность биссектрисы. Допустим, что существует ещё один луч c_1, являющийся биссектрисой угла *(ab)* (¬). Тогда по определению биссектрисы $(ac_1) = (bc_1)$, а по аксиоме VII $(ac_1) + (bc_1) = (ab)$. Из этого следует, что угол (ac_1) равен половине угла *(ab)*. Лучи *b, c* и c_1 лежат в одной полуплоскости относительно прямой, содержащей луч *a* (лемма 4), следовательно, углы *(ac)* и (ac_1) равны и отложены от полупрямой *a* в одну полуплоскость, что противоречит аксиоме VIII ⊗. Значит, луч *c* является единственной биссектрисой угла *(ab)*. Теорема доказана.

2. Равенство треугольников

Определение 9. *Треугольником* называется фигура, которая состоит из трёх точек, не лежащих на одной прямой, и трёх попарно соединяющих их отрезков. Эти точки называются *вершинами* треугольника, а отрезки – *сторонами*.



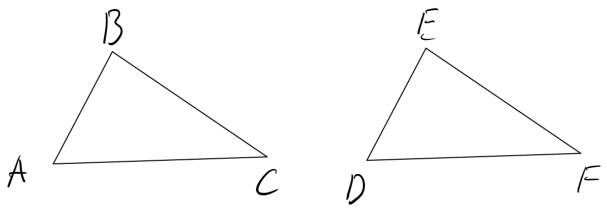
Треугольник обозначается указанием его вершин, например, Δ*ABC*. Существование треугольника непосредственно следует из аксиом I и IV.

Определение 19. *Углом треугольника ABC при вершине A* называется угол, образованный лучами *AB* и *AC*. Углы при вершинах *B* и *C* определяются аналогично.

Для удобства речи можно сказать, что угол при вершине *A* это угол *между сторонами AB* и *AC*, угол при вершине *B* это угол между сторонами *BC* и *BA*, и так далее. Будем говорить, что угол при вершине треугольника *лежит против стороны,* для которой эта вершина не является концом. Например, угол при вершине *A* лежит против стороны *BC*, угол при вершине *B* лежит против стороны *AC*, угол при вершине *C* лежит против стороны *AB*. Можно сказать и наоборот, что сторона *BC* лежит против угла *A* и так далее.

Говорят, что величины *a, b* и *c соответственно равны* величинам *d, e* и *f*, если $a = d$, $b = e$, $c = f$.

Определение 20. Треугольники (не обязательно различные) называются *равными,* если три стороны одного треугольника соответственно равны трём сторонам другого, и углы треугольников, лежащие против равных сторон, тоже равны друг другу.

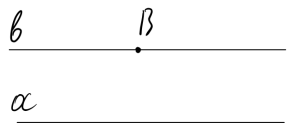


Например, если для треугольников *ABC* и *DEF* выполняются шесть равенств: $AB = DE$, $BC = EF$, $AC = DF$, $\angle C = \angle F$, $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$, то треугольники *ABC* и *DEF* равны.

Приравненные стороны (углы) также называют *соответствующими (*или просто *равными*) сторонами (углами).

Аксиома IX (первый признак равенства треугольников). Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны.

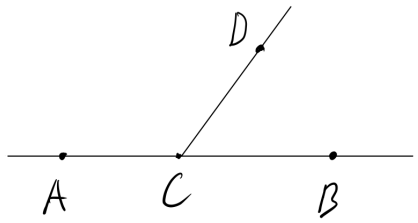
3. Параллельные прямые



Определение 21. Две прямые на плоскости называются *параллельными*, если они не пересекаются.

Обозначение: $a \parallel b$.

Аксиома X. Через точку, не лежащую на данной прямой, на плоскости может проходить не более одной прямой, параллельной данной.



Пусть *C* – точка на прямой *AB*, лежащая между точками *A* и *B*, а *D* – точка не лежащая на прямой *AB*. Построим луч *CD* и получим два угла *ACD* и *BCD* у которых сторона *CD* общая, а две другие стороны *CA* и *CB* являются дополнительными полупрямыми, так как точки *A* и *B* этих полупрямых разделяются начальной точкой *C*.

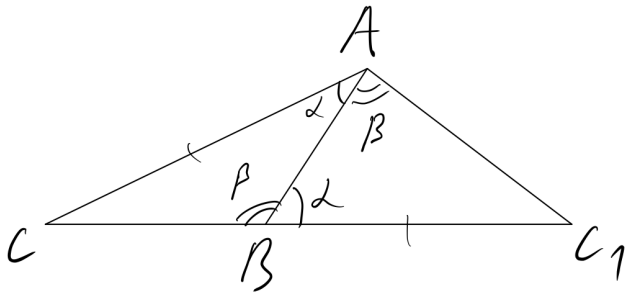
Определение 22. Два угла называются *смежными*, если у них одна сторона общая, а другие стороны этих углов являются дополнительными полупрямыми.

Из теоремы 14 следует, что *у каждого неразвёрнутого угла есть смежный с ним угол.* Действительно, если *DCB* – неразвёрнутый угол и *CA* – полупрямая, дополнительная к *CB*, то угол *DCA* по определению смежный с углом *DCB*.

Теорема 27. Сумма смежных углов равна 180°.
Доказательство. Пусть *ACD* и *BCD* данные смежные углы. Так как *CA* и *CB* дополнительные полупрямые, они образуют развёрнутый угол (опр. 15). Луч *CD* проходит между сторонами этого развёрнутого угла (опр. 16). Тогда по аксиоме VII сумма углов *ACD* и *BCD* равна 180°. Теорема доказана.

Следствие 1. Если градусная мера одного из смежных углов равна α, то градусная мера второго угла равна $180° - \alpha$.
Следствие 2. Если два угла равны, то смежные с ними углы тоже равны.

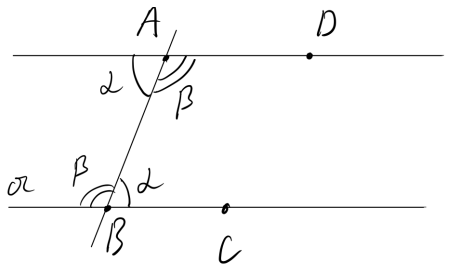
Лемма 5. Сумма любых двух углов треугольника не равна 180°.
Доказательство. Пусть ABC данный треугольник. Допустим, что сумма его углов при вершинах A и B равна 180° (¬).



Обозначим α градусную меру угла BAC и β градусную меру угла ABC. Таким образом $\alpha + \beta = 180°$. Отложим на полупрямой дополнительной к BC отрезок BC_1, равный AC. Углы ABC и ABC_1 являются смежными (опр. 22), значит, $\angle ABC_1 = 180° - \beta = \alpha$ (след. 1 из т. 27). В треугольниках ABC и BAC_1 $AC = BC_1$, $AB = BA$, $\angle BAC = \angle ABC_1$, следовательно, по аксиоме IX $\Delta ABC = \Delta BAC_1$. По определению равных треугольников, их углы, лежащие против равных сторон, равны. Значит $\angle BAC_1 = \angle ABC = \beta$.

Точки C и C_1 лежат на дополнительных полупрямых и, следовательно, разделяются точкой B (т. 11). Тогда по определению отрезка точка B принадлежит отрезку CC_1. Луч AB пересекает отрезок CC_1 в точке B, значит, он проходит между сторонами угла CAC_1 (опр. 16). Тогда по аксиоме VII $\angle CAC_1 = \angle CAB + \angle BAC_1 = \alpha + \beta = 180°$. Следовательно, угол CAC_1 является развёрнутым (след. 2 из т. 21). По определению развёрнутого угла полупрямые AC и AC_1 являются дополнительными, то есть состоят из точек одной прямой. Таким образом, точка C_1 принадлежит прямой AC. Прямая AC не совпадает с прямой BC, потому что точка A не лежит на прямой BC по определению треугольника ABC. Получается, что две различные прямые AC и BC пересекаются в двух точках C и C_1, что противоречит теореме 2 ⊗. Значит, сумма углов A и B не равна 180°. Лемма доказана.

Теорема 28. Через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести прямую, параллельную данной.
Доказательство. Пусть a – данная прямая, и A – точка не лежащая на прямой a.



Отметим на прямой a две точки B и C, и проведём прямую AB (акс. I и II). Отложим от полупрямой AB в полуплоскость точки C угол BAD с градусной мерой, равной $180° - \angle ABC$ (акс. VIII). Мы утверждаем, что прямые BC и AD параллельны.

Обозначим α градусную меру угла ABC, и β градусную меру угла BAD. Тогда $\beta = 180° - \alpha$.

Заметим, что угол смежный с углом *ABC* равен 180° – α, то есть равен β, а угол смежный с углом *BAD* равен 180° – $\beta = \alpha$ (след. 1 из т. 27).

Допустим, что прямые *BC* и *AD* пересекаются в некоторой точке *E* (¬). Точка *E* не лежит на прямой *AB*, потому что у прямых *AB* и *BC* не может быть двух общих точек (т. 2). Значит, точка *E* лежит либо на полупрямых *AD* и *BC*, либо на дополнительных к ним, в зависимости от того в какой полуплоскости относительно прямой *AB* она оказалась. Тогда существует треугольник *ABE*, у которого сумма углов *EAB* и *EBA* равна $\alpha + \beta = 180°$, не зависимо от того в какой полуплоскости относительно *AB* лежит точка *E*. А это противоречит лемме 5 ⊗. Следовательно прямые *BC* и *AD* не могут пересекаться, то есть являются параллельными. Теорема доказана.

Из теоремы 28 и аксиомы X следует, что *через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести и при том только одну прямую, параллельную данной.*

Теорема 29. Пусть прямая *a* параллельна прямой *b*. Тогда все точки прямой *a* лежат в одной полуплоскости относительно прямой *b*.
Доказательство. Пусть *A* и *B* произвольные точки прямой *a*. Прямая *a* параллельна *b*, значит, эти прямые не имеют общих точек (опр. 21). Отрезок *AB* состоит из точек прямой *a* (опр. 3), значит, он тоже не имеет общих точек с прямой *b*, то есть не пересекается с этой прямой. Значит, по теореме 8 точки *A* и *B* лежат в одной полуплоскости относительно прямой *b*. Теорема доказана.

4. Анализ аксиоматики

Пространственные аксиомы.

Аксиома C_1. В каждой плоскости есть по крайней мере одна точка. Существуют четыре точки, не принадлежащие одной плоскости.

Аксиома C_2. Если две различные плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой.

Аксиома C_3. Если две различные прямые имеют общую точку, то через них можно провести плоскость, и притом только одну.

Перечислим основные (неопределяемые) понятия аксиоматики.
Основные фигуры: точка, прямая, плоскость.
Основные отношения: принадлежность прямой, принадлежать плоскости, лежать между, иметь длину, иметь градусную меру.

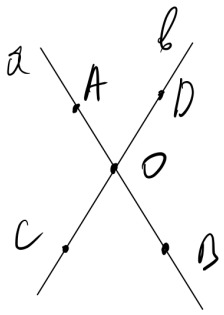
Принадлежность точки прямой не определяется, поэтому является основным понятием, а вот принадлежность точки отрезку или полупрямой имеют

определение. Например, точка принадлежит отрезку *AB* если она лежит между точками *A* и *B*. Поэтому принадлежность отрезку/полупрямой не является основным понятием.

Длина и градусная мера не относятся к основным понятиям, потому что известен их смысл – это числа, соответствующие отрезку (углу). А вот как именно образовано соответствие нам не известно, так как его существование задано аксиомами. Поэтому иметь длину и иметь градусную меру – основные понятия.

§3. Углы

1. Вертикальные углы



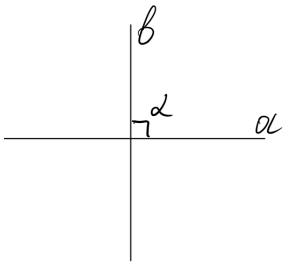
Пусть прямые *a* и *b* пересекаются в точке *O*. Точка *O* разбивает каждую из прямых на две полупрямые. Пусть, например, *OA* и *OB* – полупрямые прямой *a*, а *OD* и *OC* – полупрямые прямой *b*. Тогда стороны углов *AOD* и *COB* являются дополнительными полупрямыми.

Определение 23. Два угла называются *вертикальными*, если стороны одного угла являются дополнительными полупрямыми сторон другого.

Теорема 30. Вертикальные углы равны.
Доказательство. Пусть *AOD* и *COB* – данные вертикальный углы. Тогда угол *DOB* является смежным и углу *AOD*, и углу *COB* (опр. 22), следовательно, $\angle DOB + \angle AOD = 180°$, и $\angle DOB + \angle COB = 180°$ (т. 27). Это возможно только если $\angle AOD = \angle COB$, то есть вертикальные углы равны. Теорема доказана.

2. Прямой угол. Перпендикулярные прямые

Определение 24. Угол, равный 90°, называется прямым углом.



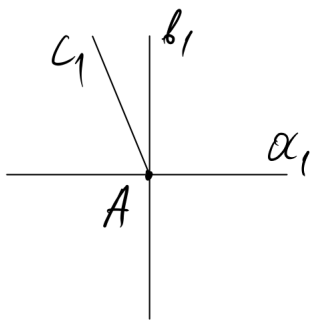
Из теоремы 27 следует, что *угол смежный прямому углу есть прямой угол.*

Пусть *a* и *b* – две пересекающиеся прямые. Полупрямые этих прямых образуют четыре неразвёрнутых угла. Пусть *α* – один из этих углов. Тогда любой из остальных трёх углов будет либо смежным углу *α,* либо вертикальным углу *α.* Отсюда следует, что если один из углов прямой, то остальные углы тоже прямые. В этом случае мы говорим, что *прямые пересекаются под прямым углом.*

Определение 25. Две прямые называются *перпендикулярными*, если они пересекаются под прямым углом.

Обозначение: $a \perp b$.

Теорема 31. Через каждую точку прямой можно провести и притом только одну перпендикулярную к ней прямую.
Доказательство. Пусть a – данная прямая и A – данная точка на ней. Обозначим через a_1 одну из полупрямых прямой a с начальной точкой A (т. 11). Отложим от полупрямой a_1 угол (a_1b_1), равный 90° (акс. VIII). Тогда прямая, содержащая луч b_1, будет перпендикулярна прямой a (опр. 25).



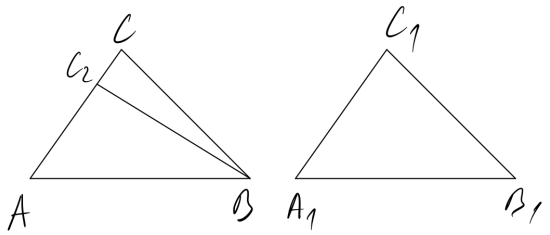
Допустим, что кроме построенной прямой, существует другая прямая, тоже проходящая через точку A и перпендикулярная прямой a (¬). Обозначим c_1 полупрямую этой прямой с начальной точкой A и лежащую в одной полуплоскости с лучом b_1 (т. 9 и 11).

Углы (a_1b_1) и (a_1c_1), равные по 90° каждый (опр. 25), отложены в одну полуплоскость от полупрямой a_1. Но по аксиоме VIII от полупрямой a_1 в данную полуплоскость можно отложить только один угол, равный 90° ⊗. Следовательно, через точку A проходит единственная прямая, перпендикулярная прямой a. Теорема доказана.

§4. Равенство треугольников

1. Второй признак равенства треугольников

Теорема 32. Если сторона и прилежащие к ней углы одного треугольника равны соответственно стороне и прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны.
Доказательство. Пусть у треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle B =$



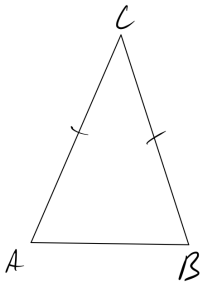
$\angle B_1$. Докажем, что в этом случае $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$, то есть $AC = A_1C_1$, $BC = B_1C_1$, $\angle C = \angle C_1$. Если у треугольников $AC = A_1C_1$, то они равны по первому признаку равенства (акс. IX). Допустим, что $AC \neq A_1C_1$ (¬). Тогда либо $AC > A_1C_1$, либо $AC < A_1C_1$ (свойство чисел). Пусть для определённости $AC > A_1C_1$.

Отложим на полупрямой AC отрезок AC_2, равный A_1C_1 (акс. V). Рассмотрим треугольники $A_1B_1C_1$ и ABC_2, у них $AB = A_1B_1$ и $\angle A = \angle A_1$ по условию теоремы, а $AC_2 = A_1C_1$ по построению, следовательно, $\Delta A_1B_1C_1 = \Delta ABC_2$ по первому признаку

равенства (акс. IX). Тогда $\angle A_1B_1C_1 = \angle ABC_2$ (опр. 20), и, поскольку $\angle A_1B_1C_1 = \angle ABC$ по условию теоремы, получаем, что $\angle ABC = \angle ABC_2$.

Так как $AC > A_1C_1$ и $AC_2 = A_1C_1$, то $AC_2 < AC$. Тогда по теореме 4 точка C_2 лежит между A и C, и, следовательно, точка C_2 принадлежит отрезку AC (опр. 3). Луч BC_2 проходит между лучами BA и BC, так как пересекает отрезок AC в точке C_2 (опр. 16). Значит, по аксиоме VII $\angle ABC = \angle ABC_2 + \angle CBC_2$, следовательно, угол ABC_2 меньше угла ABC, что противоречит равенству этих углов ⊗. Значит, $AC = A_1C_1$ и $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$. Теорема доказана.

2. Равнобедренный треугольник



Пусть (ab) – некоторый угол с вершиной C. Отложим на сторонах этого угла равные отрезки CA и CB. Тогда получим треугольник ABC у которого две стороны равны.

Определение 26. Треугольник называется *равнобедренным*, если у него две стороны равны. Эти равные стороны называются *боковыми сторонами,* а третья сторона называется *основанием* треугольника.

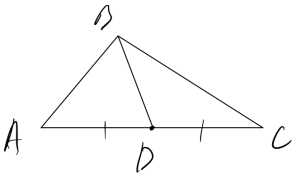
Теорема 33. В равнобедренном треугольнике углы при основании равны. Именно, если $AC = BC$ в треугольнике ABC, то $\angle A = \angle B$.

Доказательство. По условию $CA = CB$, $CB = CA$ и $\angle C = \angle C$, следовательно, $\Delta CAB = \Delta CBA$ (акс. IX). Из равенства треугольников следует, что $\angle A = \angle B$ (опр. 20). Теорема доказана.

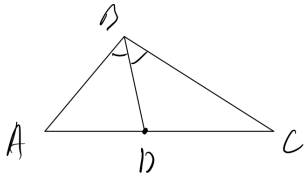
Теорема 34. Если в треугольнике два угла равны, то треугольник равнобедренный. Именно, если $\angle A = \angle B$ в треугольнике ABC, то $AC = BC$.

Доказательство. Пусть в треугольнике ABC $\angle A = \angle B$, тогда $\angle B = \angle A$ и $AB = BA$, следовательно, $\Delta ABC = \Delta BAC$ по второму признаку (т. 32). Из равенства треугольников следует, что $AC = BC$ (опр. 20). Теорема доказана.

3. Медиана, биссектриса и высота

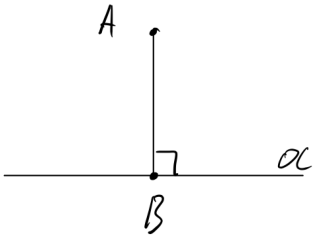


Определение 27. *Медианой* треугольника, проведённой из данной вершины, называется отрезок, соединяющий эту вершину с серединой противолежащей стороны.

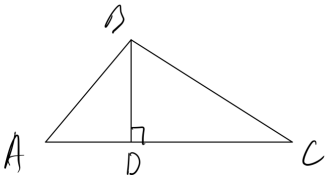


Определение 28. *Биссектрисой* треугольника, проведённой из данной вершины, называется отрезок биссектрисы угла треугольника, соединяющий эту вершину с точкой на противолежащей стороне.

Из теоремы 6 следует, что *у любого треугольника есть три медианы.* Из теорем 26 и 23 следует, что *у любого треугольника есть три биссектрисы.*



Определение 29. *Перпендикуляром* к данной прямой называется отрезок прямой, перпендикулярной данной, имеющий своим концом их точку пересечения. Этот конец отрезка называется *основанием* перпендикуляра.

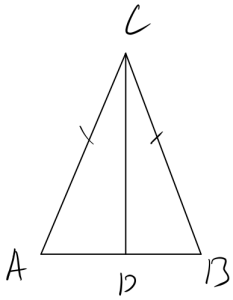


Определение 30. *Высотой* треугольника, опущенной из данной вершины, называется перпендикуляр, проведённой из этой вершины к прямой, содержащей противолежащую сторону треугольника.

Количество высот в треугольнике будет установлено позже.

Теорема 35. В равнобедренном треугольнике медиана, проведённая к основанию, является биссектрисой и высотой.

Доказательство. Пусть *ABC* – данный равнобедренный треугольник с основанием *AB*. Пусть *CD* – медиана, проведённая к основанию, тогда точка *D* – середина отрезка *AB* (опр. 27), и по определению *D* принадлежит отрезку *AB*, то есть лежит между точками *A* и *B* (опр. 3). Тогда точки *D* и *B* лежат по одну сторону от *A*, следовательно, лучи *AD* и *AB* совпадают (следствие т. 11), аналогично совпадают лучи *BD* и *BA*. Значит, совпадают углы *CAD* и *CAB*, *CBD* и *CBA*.



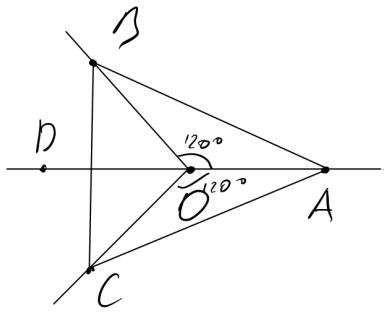
Рассмотрим треугольники *CAD* и *CBD*, у них *AC* = *BC* так как треугольник *ABC* равнобедренный (опр. 26), ∠*CAD* = ∠*CBD* по теореме 33, *AD* = *BD* так как *D* – середина *AB* (опр. 6). Следовательно, Δ*CAD* = Δ*CBD* по первому признаку (акс. IX). Из равенства треугольников следует, что ∠*ACD* = ∠*BCD* и ∠*ADC* = ∠*BDC* (опр. 20).

Луч *CD* проходит между сторонами угла *ACB,* так как пересекает отрезок *AB* в точке *D* (опр. 16). Тогда из равенства углов *ACD* и *BCD* следует, что *CD* – биссектриса (опр. 28). Точка *D* принадлежит отрезку *AB* (опр. 6), следовательно, точки *A* и *B* разделяются точкой *D* (опр. 3), а, значит, полупрямые *DA* и *DB* являются дополнительными (т. 11 и опр. 9). Тогда углы *ADC* и *BDC* – смежные (опр. 22) и в сумме равны 180° (т. 27). Так как эти углы равны, то равны их градусные меры (опр. 17), и градусная мера каждого из них равна 180°/2 = 90°, то есть прямые *AB* и *CD* перпендикулярны (опр. 25), следовательно, *CD* – перпендикуляр к прямой *AB* (опр. 29), а, значит, и высота треугольника *ABC* (опр. 30). Теорема доказана.

Поскольку из вершины треугольника исходит только одна биссектриса, из теоремы 35 следует, что *в равнобедренном треугольнике биссектриса, проведённая к основанию, является медианой и высотой.*

4. Равносторонний треугольник

Пусть *OA* некоторая полупрямая. Отложим от этой полупрямой в разные полуплоскости углы равные 120° и на сторонах этих углов отложим отрезки *OB* и *OC*, равные отрезку *OA*. Обозначим *OD* полупрямую, дополнительную к *OA*. Углы *BOD* и *COD* смежные углам, равным 120°, значит, каждый из них равен 60°. Прямая *OA* разделяет стороны угла *BOC*, следовательно, отрезок *BC* пересекает эту прямую, причём точка пересечения лежит на полупрямой *OD* (иначе угол *BOC* был бы равен 240°). Значит, луч *OD* проходит между сторонами угла *BOC* и угол *BOC* равен сумме углов *BOD* и *COD*, то есть 120°. Треугольники *BOA*, *AOC* и *BOC* равны по первому признаку равенства, следовательно, равны и стороны *BA*, *BC* и *AC* треугольника *ABC*.



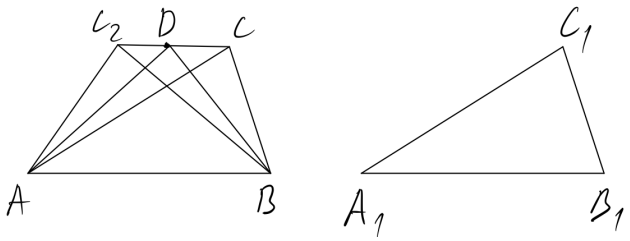
Определение 31. Треугольник у которого все три стороны равны, называется *равносторонним*.

Теорема 36. В равностороннем треугольнике все три угла равны. Обратно, если в треугольнике все три угла равны, то этот треугольник равносторонний.
Доказательство. Пусть *ABC* – равносторонний треугольник. Из равенства сторон *AB* и *AC* следует равенство углов *B* и *C*, а из равенства сторон *AC* и *BC* следует равенство углов *A* и *B* (т. 33). Значит, все три угла равностороннего треугольника равны.

Пусть в треугольнике *ABC* все углы равны. Из равенства углов *A* и *B* следует равенство сторон *AC* и *BC*, а из равенства углов *B* и *C* следует равенство сторон *AB* и *AC* (т. 34), значит, все три стороны треугольника *ABC* равны, то есть треугольник *ABC* равносторонний (опр. 31). Теорема доказана.

5. Третий признак равенства треугольников

Теорема 37. Если три стороны одного треугольника равны соответственно трём сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны.
Доказательство. Пусть у треугольников *ABC* и $A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $BC = B_1C_1$. Докажем, что $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$. Если $\angle A = \angle A_1$ или $\angle B = \angle B_1$, то треугольники равны по первому признаку равенства треугольников (акс. IX). Допустим, что у данных треугольников $\angle A \neq \angle A_1$ и $\angle B \neq \angle B_1$ (¬). Отложим от полупрямой *AB* в полуплоскость точки *C* угол, равный углу A_1 (акс. VIII), и отложим на его стороне отрезок AC_2, равный A_1C_1 (акс. V). Тогда у треугольников $A_1B_1C_1$ и ABC_2 $AB = A_1B_1$



по условию, $A_1C_1 = AC_2$ и $\angle B_1A_1C_1 = \angle BAC_2$ по построению, следовательно, $\Delta A_1B_1C_1 = \Delta ABC_2$ (акс. IX). Из равенства треугольников следует, что $BC_2 = B_1C_1$ (опр. 20). По условию $BC = B_1C_1$, следовательно, $BC_2 = BC$, то есть треугольник BCC_2 равнобедренный с основанием C_2C (опр. 26).

По построению $AC_2 = A_1C_1$ и по условию $AC = A_1C_1$, следовательно, $AC_2 = AC$, то есть треугольник ACC_2 равнобедренный с основанием C_2C (опр. 26).

Пусть точка D – середина отрезка CC_2 (т. 6). Угол BAC_2 отложен в полуплоскость точки C ⇒ точки C_2 и C лежат в одной полуплоскости относительно прямой AB ⇒ отрезок C_2C не пересекается с прямой AB (т. 8) ⇒ точка D не лежит на прямой AB (опр. 7) ⇒ прямые AD и BD различны (акс. II).

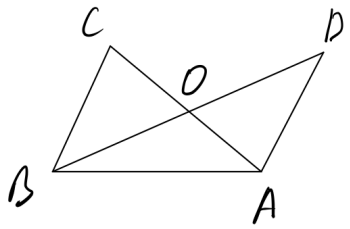
AD и BD медианы в равнобедренных треугольниках ACC_2 *и* BCC_2 (опр. 27), следовательно, по теореме 35 они являются и высотами, а, значит, и перпендикулярами (опр. 30), то есть прямая AD перпендикулярна прямой CC_2 и прямая BD перпендикулярна CC_2 (опр. 29). Но по теореме 31 через точку D может проходить только одна прямая, перпендикулярная прямой CC_2 ⊗. Значит, $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$. Теорема доказана.

§5. Соотношения между углами и сторонами треугольника

1. Соотношения между углами треугольника

Теорема 38. Сумма любых двух углов треугольника меньше 180°.

Доказательство. Пусть ABC – данный треугольник. Докажем, что сумма углов при вершинах A и C меньше 180°. Обозначим через O середину стороны AC (т. 6). Заметим, что так как точка O по определению принадлежит отрезку AC, то есть разделяет точки A и C, полупрямые OA и OC дополнительные (т. 11 и опр. 9). Отложим на полупрямой, дополнительной полупрямой OB, отрезок OD, равный BO (т. 14 и акс. V). Тогда в треугольниках AOD и COB углы при вершине O вертикальные (опр. 23), и, следовательно, они равны (т. 30), $AO = OC$ так как точка O – середина (опр. 6), $OD = OB$ по построению, следовательно, $\Delta AOD = \Delta COB$ по аксиоме IX. Из равенства треугольников по определению следует, что $\angle OAD = \angle OCB$. Точки O и C лежат по одну сторону от A, значит, лучи AO и AC совпадают (следствие из т. 11). Аналогично лучи CO и CA совпадают. Значит, $\angle CAD = \angle ACB$ **(*)**.



Луч AO пересекает отрезок BD в точке O, следовательно, луч AO проходит между сторонами угла BAD (опр. 16). Тогда по аксиоме VII $\angle BAD = \angle BAC + \angle CAD = \angle BAC + \angle ACB$ **(**)** – во втором равенстве мы использовали (*). Таким образом, угол BAD равен сумме углов при вершинах A и C треугольника ABC.

По определению треугольника точки A, B и C не лежат на одной прямой ⇒ прямые AB и AC различны ⇒ точка O прямой AC не лежит на прямой AB (т. 2) ⇒ прямая BO не совпадает с прямой AB ⇒ точка D прямой BO не лежит на прямой AB (т. 2) ⇒ угол BAD не является развёрнутым (опр. 15 и 9) ⇒ $\angle BAD < 180°$ (след. 1 из т. 21) ⇒ $\angle BAC + \angle ACB < 180°$ (**). Теорема доказана.

Определение 32. Угол меньший 90° называется *острым*. Угол больший 90°, но меньшей 180°, называется *тупым*.

Из теоремы 38 следует, что *в каждом треугольнике два угла острые.* В противном случае, если бы только один угол был острым, сумма двух других углов была бы больше 180°.

Определение 33. *Внешним углом* треугольника при данной вершине называется угол, смежный с углом треугольника при этой вершине.

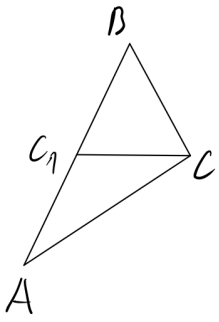
Чтобы не путать угол треугольника при данной вершине с внешним углом при этой вершине, угол треугольника называют *внутренним углом*.

Теорема 39. Внешний угол треугольника больше любого внутреннего угла, не смежного с ним.
Доказательство. Пусть ABC – данный треугольник. Докажем, что внешний угол при вершине A больше внутреннего угла B. По теореме 38 сумма внутренних углов A и B меньше 180°: $\angle A + \angle B < 180° \Rightarrow \angle B < 180° - \angle A$. Но по следствию 1 из теоремы 27 $(180° - \angle A)$ есть градусная мера внешнего угла при вершине A, следовательно, угол B меньше внешнего угла при вершине A (опр. 17). Теорема доказана.

2. Соотношение между углами треугольника и противолежащими им сторонами

Теорема 40. Если $AB > BC$ в треугольнике ABC, то угол C больше угла A. Обратно, если угол C больше угла A, то $AB > BC$. Короче говоря, в треугольнике против большей стороны лежит больший угол, против большего угла лежит большая сторона.
Доказательство. Пусть $AB > BC$ в треугольнике ABC. Отложим на полупрямой BA отрезок BC_1, равный отрезку BC (акс. V). Точка C_1 лежит между точками A и B (т. 4)

и, следовательно, C_1 принадлежит отрезку AB (опр. 3). Полупрямая CC_1 проходит между лучами CA и CB так как пересекает отрезок AB в точке C_1 (опр. 16), следовательно, по аксиоме VII $\angle BCA = \angle BCC_1 + \angle ACC_1 \Rightarrow \angle BCC_1 < \angle BCA$ **(*)**.



$BC_1 = BC$ по построению $\Rightarrow$ треугольник BCC_1 равнобедренный (опр. 26) $\Rightarrow \angle BC_1C = \angle BCC_1$ (т. 33) **(**)**.

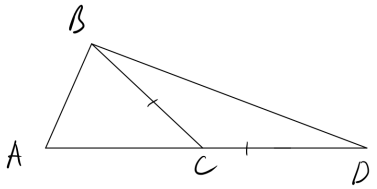
Точка C_1 лежит между точками A и $B \Rightarrow C_1A$ и C_1B дополнительные полупрямые (т. 11 и опр. 9) $\Rightarrow$ угол BC_1C смежный с углом AC_1C (опр. 22) $\Rightarrow$ угол BC_1C является внешним углом треугольника AC_1C (опр. 32) $\Rightarrow \angle BC_1C > \angle CAC_1$ (т. 39) $\Rightarrow \angle BC_1C > \angle CAB$ (следствие из т. 11) $\Rightarrow \angle CAB < \angle BCA$ (*, **). Итак, угол C треугольника ABC больше угла A.

Докажем теперь, что если $\angle C > \angle A$, то AB > BC. Допустим, что утверждение неверно ($\neg$). Тогда либо AB = BC, либо AB < BC. В первом случае треугольник ABC – равнобедренный (опр. 26) и, следовательно, $\angle A = \angle C$ (т. 33), но это противоречит условию $\angle C > \angle A$. Если же AB < BC, то по доказанному $\angle A > \angle C$, что также противоречит условию $\otimes$. Значит, если $\angle C > \angle A$, то AB > BC. Теорема доказана.

Замечание. Здесь уместно сразу доказать лемму 24, которая попала в стереометрию поскольку, только там она впервые понадобилась.

3. Неравенство треугольника

Теорема 41. У каждого треугольника сумма двух сторон больше третьей стороны.
Доказательство. Пусть ABC – данный треугольник. Докажем, что $AB < AC + CB$.



Отложим на полупрямой AC отрезок AD, равный $AC + CB$ (акс. V). Так как $AC < AD$, точка C лежит между точками A и D (т. 4), то есть принадлежит отрезку AD (опр. 3). Тогда $AD = AC + CD$ (акс. IV) и, следовательно, $CD = CB$. Значит, треугольник BCD – равнобедренный (опр. 26) и $\angle CBD = \angle BDC$ (т. 33). Так как точки A и C лежат по одну сторону от D, лучи DC и DA совпадают (следствие из т. 11), значит, совпадают и углы BDC и BDA. Таким образом, $\angle CBD = \angle BDA$.

Луч BC пересекает отрезок AD в точке C и, следовательно, проходит между сторонами угла ABD (опр. 16) $\Rightarrow \angle ABD = \angle ABC + \angle CBD = \angle ABC + \angle BDA$ (акс. VI) $\Rightarrow \angle ABD > \angle BDA \Rightarrow AD > AB$ (т. 40) $\Rightarrow AC + CB > AB \Rightarrow AB < AC + CB$. Теорема доказана.

Следствие. Если для трёх точек A, B, C выполняется условие $AC = AB + BC$, то точки A, B, C лежат на одной прямой, причём точка B лежит между точками A и C.
Доказательство. Допустим, что точки A, B, C не лежат на одной прямой. Тогда они являются вершинами треугольника (опр. 9) и по теореме 41 $AC < AB + BC$ $\otimes$.
Предположим, что точка A лежит между точками B и C. Тогда $BC = AB + AC$ (акс. IV) и с учётом условия $AC = AB + BC$ получаем, что $AB = 0$. Аналогично проверяется, что точка C не лежит между A и B. Так как из трёх точек A, B и C одна лежит между двумя другими (акс. III), то точка B лежит между A и C. Следствие доказано.

Определение 34. Если точки A и B различны, то *расстоянием* между ними называется длина отрезка AB. Если точки A и B совпадают (не являются различными), то расстояние между ними принимается равным нулю.

Теорема 42 (неравенство треугольника). Если A, B, C – любые три точки, не обязательно различные, то расстояние AB не больше суммы расстояний $AC + CB$.
Доказательство. Будем различать четыре случай: 1) все три точки A, B, C различны и не лежат на одной прямой; 2) все точки различны, но лежат на одной прямой; 3) две точки совпадают; 4) все точки совпадают.

В первом случае утверждение теоремы следует из теоремы 41.

Рассмотрим второй случай. Точки A, B, C различные и лежат на одной прямой. Если точка C лежит между A и B, то $AB = AC + CB$ (акс. IV), следовательно, AB не больше суммы $AC + CB$. Если точка A лежит между B и C, то $BC = AB + AC \Rightarrow AB < BC \Rightarrow AB < AC + CB$. Если точка B лежит между A и C, то $AC = AB + BC \Rightarrow AB < AC \Rightarrow AB < AC + CB$. При любом расположении точек A, B, C на прямой расстояние AB не больше суммы расстояний $AC + CB$.

Рассмотрим третий случай, когда две точки совпадают. Если точка A совпадает с B, то $AB = 0$ (опр. 34) $\Rightarrow AB < AC + CB$. Если точка A совпадает с C, то $AC = 0$ и $AB = CB$. Если точка B совпадает с C, то $BC = 0$ и $AB = AC$. В любом варианте совпадения двух точек расстояние AB не больше суммы расстояний $AC + CB$.

В четвёртом случае, когда все три точки совпадают, все три расстояния равны нулю и, следовательно, AB не больше $AC + CB$. Итак, для любых трёх точек A, B, C расстояние AB не больше суммы расстояний $AC + CB$. Теорема доказана.

§6. Прямоугольные треугольники

1. Углы и стороны прямоугольного треугольника

Определение 35. Треугольник называется *прямоугольным*, если у него есть прямой угол.

Так как в любом треугольнике два угла острые, то *в прямоугольном треугольнике только один угол прямой.* Два другие угла прямоугольного треугольника острые.

Определение 36. Сторона прямоугольного треугольника, противолежащая прямому углу, называется *гипотенузой*. Две другие стороны называются *катетами*.

Так как в любом треугольнике против большего угла лежит большая сторона, то *в прямоугольном треугольнике гипотенуза больше любого из катетов.*

2. Равенство прямоугольных треугольников

Для прямоугольных треугольников есть три признака равенства.

1) Если катет и противолежащий ему угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны катету и противолежащему углу другого треугольника, то такие треугольники равны. (Признак равенства по катету и противолежащему углу.)
2) Если гипотенуза и катет одного прямоугольного треугольника соответственно равны гипотенузе и катету другого треугольника, то такие треугольники равны. (Признак равенства по гипотенузе и катету.)
3) Если гипотенуза и острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны гипотенузе и острому углу другого треугольника, то такие треугольники равны. (Признак равенства по гипотенузе и острому углу.)

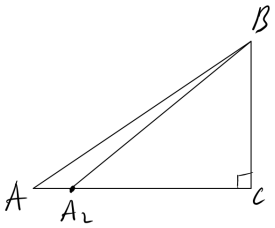
Теорема 43. Прямоугольные треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ с прямыми углами C и C_1 равны, если выполняется одно из следующих условий:

1) $BC = B_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$;

2) $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$;

3) $AB = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$.

Доказательство. Заметим, что если $AC = A_1C_1$, то во всех трёх случаях треугольники равны по первому признаку равенства (акс. IX). Допустим, что $AC \neq A_1C_1$, например, $AC > A_1C_1$ (¬). Рассмотрим сначала случаи 1 и 2.

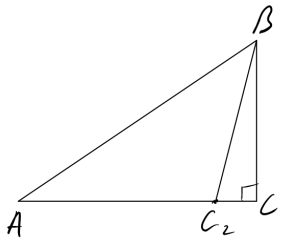


Отложим на полупрямой CA отрезок CA_2, равный C_1A_1 (акс. V). Точка A_2 будет лежать между точками A и C так как $CA_2 < CA$ (т. 4) ⇒ полупрямые A_2A и A_2C дополнительные (т. 11 и опр. 9) ⇒ углы BA_2C и BA_2A смежные (опр. 22).

Рассмотрим треугольники $A_1B_1C_1$ и A_2BC. У них $\angle C = \angle C_1$ и $BC = B_1C_1$ по условию, $CA_2 = CA_1$ по построению, следовательно, $\Delta A_2BC = \Delta A_1B_1C_1$ (акс. IX). Из равенства треугольников следует, что $\angle BA_2C = \angle B_1A_1C_1$ и $BA_2 = B_1A_1$ (опр. 20).

Пусть выполнены условия 1). Тогда $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1 = \angle BA_2C$. Но угол BA_2C является внешним углом треугольника BA_2A (опр. 33), а угол BAC совпадает с внутренним углом BAA_2 треугольника BA_2A (следствие из т. 11) $\Rightarrow \angle BA_2C > \angle BAC$ (т. 40) $\otimes \Rightarrow AC = A_1C_1$ и $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

Пусть выполнены условия 2). Тогда $AB = A_1B_1 = BA_2 \Rightarrow$ треугольник BAA_2 равнобедренный (опр. 26) $\Rightarrow \angle BAA_2 = \angle BA_2A$ (т. 33). Но угол BA_2A тупой так как он смежный с острым углом BA_2C в прямоугольном треугольнике BA_2C. Получаем, что в треугольнике BAA_2 два угла тупые, что противоречит теореме 38 $\otimes \Rightarrow AC = A_1C_1$ и $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

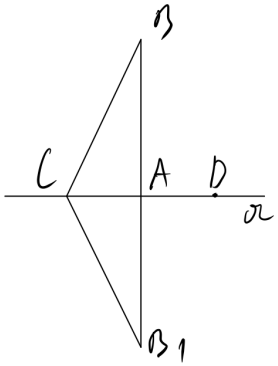


Пусть выполнены условия 3). Отложим на полупрямой AC отрезок AC_2, равный A_1C_1 (акс. V). Точка C_2 лежит между точками A и C так как $AC_2 < AC$ (т. 4) $\Rightarrow$ полупрямые C_2A и C_2C дополнительные (т. 11 и опр. 9) $\Rightarrow$ углы BC_2A и BC_2C смежные (опр. 22). Углы BCC_2 и BCA совпадают (следствие т. 11). Рассмотрим треугольники ABC_2 и $A_1B_1C_1$. У них $AB = A_1B_1$ и $\angle A = \angle A_1$ по условию, $AC_2 = A_1C_1$ по построению $\Rightarrow \Delta ABC_2 = \Delta A_1B_1C_1$ (акс. IX) $\Rightarrow \angle AC_2B = \angle A_1C_1B_1$ (опр. 20) $\Rightarrow$ угол AC_2B прямой $\Rightarrow$ смежный угол BC_2C тоже прямой (опр. 24 и след. 1 из т. 27) $\Rightarrow$ в треугольнике BCC_2 два угла прямые, что противоречит теореме 38 $\otimes \Rightarrow AC = A_1C_1$ и $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$. Теорема доказана.

3. Перпендикуляр и наклонная

Теорема 44. Из точки вне данной прямой можно провести к этой прямой и притом только один перпендикуляр (или перпендикулярную прямую).

Доказательство. Пусть a – данная прямая и B – точка, не лежащая на этой прямой.



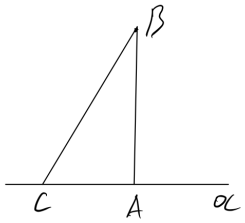
Отметим на прямой a какие-нибудь точки C и D. Если прямая BC перпендикулярна a, то отрезок BC и есть перпендикуляр, опущенный из точки B на прямую a (опр. 29).

Пусть отрезок BC не является перпендикуляром к прямой a. Прямая a разбивает плоскость на две полуплоскости, одной из которых принадлежит точка B. Отложим в другую полуплоскость от полупрямой CD угол, равный углу BCD (акс. VIII), и на стороне этого угла отложим отрезок CB_1, равный отрезку CB (акс. V).

Точки B и B_1 лежат в разных полуплоскостях относительно прямой a, следовательно, отрезок BB_1 пересекает эту прямую в некоторой точке A (т. 8). Рассмотрим треугольники CAB и CAB_1. В них сторона AC – общая, $CB = CB_1$ по построению, $\angle BCA = \angle B_1CA$ – либо по построению (если точки C и D разделяются точкой A), либо как смежные к углам равным по построению (если точки C и D не разделяются точкой A), следовательно, $\Delta CAB = \Delta CAB_1$ по аксиоме IX $\Rightarrow \angle CAB = \angle CAB_1$ (опр. 20). Точки B и B_1 разделяются точкой A, следовательно, полупрямые AB и AB_1 дополнительные (т. 11 и опр. 9), а, значит, углы CAB и CAB_1 смежные (опр. 22) и равные, следовательно, каждый из этих углов равен 90° (т. 27), то есть является прямым (опр. 24) $\Rightarrow BA \perp a$ (опр. 25) $\Rightarrow BA$ есть перпендикуляр, опущенный из точки B на прямую a (опр. 29).

Допустим теперь, что из точки B можно провести ещё один перпендикуляр BA_1 к прямой a (¬). Тогда у треугольника BAA_1 будет два прямых угла, что противоречит теореме 38 ⊗. Следовательно, из точки B можно провести только один перпендикуляр (или перпендикулярную прямую) к прямой a. Теорема доказана.

Из теоремы 44 следует, что *у любого треугольника есть три высоты.* В прямоугольном треугольнике две высоты совпадают со сторонами треугольника. *В равнобедренном треугольнике высота, проведённая к основанию, является медианой и биссектрисой.*



Определение 37. Пусть BA – перпендикуляр, опущенный из точки B на прямую a, и C – любая точка прямой a, отличная от A. Отрезок BC называется *наклонной*, проведённой из точки B к прямой a. Точка C называется *основанием* наклонной. Отрезок AC называется *проекцией* наклонной.

Любая наклонная больше перпендикуляра, проведённого из той же точки, потому что она является гипотенузой в треугольнике, образованном наклонной, перпендикуляром и проекцией наклонной.

Определение 38. *Расстоянием от точки B до прямой a*, не проходящей через точку B, называется длина перпендикуляра, опущенного из точки B на прямую a.

Так как перпендикуляр короче наклонной, проведённой из той же точки, то *расстояние от точки B до прямой a не больше расстояния от точки B до любой из точек прямой a.*

§7. Параллельные прямые

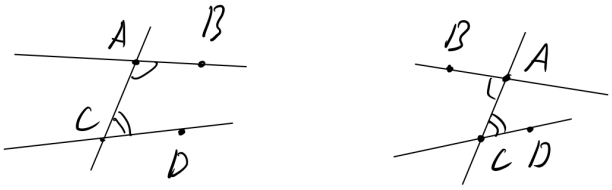
1. Признаки параллельности прямых

Весь предыдущий материал не опирался на аксиому X. Часть геометрии независящая от аксиомы о параллельных, называется *абсолютной геометрией*. Геометрия, в которой аксиома X истинна называется *евклидовой геометрией*, геометрия, в которой аксиома X ложна, называется *геометрией Лобачевского*. Все утверждения абсолютной геометрии истинны и в евклидовой геометрии, и в геометрии Лобачевского. Дальнейшее изложение относится только к евклидовой геометрии.

Теорема 45. Две прямые, параллельные третьей, параллельны друг другу.
Доказательство. Пусть прямые a и b параллельны прямой c. Допустим, что прямые a и b не параллельны (¬). Тогда они пересекаются в некоторой точке C. Таким образом, через точку C проходит две прямые, параллельные прямой c. Но это противоречит аксиоме X ⊗. Следовательно $a \parallel b$. Теорема доказана.

Из теоремы 45 следует, что *если некоторая прямая пересекает одну из двух параллельных прямых, то она пересекает и другую.*

Определение 39. Пусть AB и CD – две прямые. Пусть AC – третья прямая, пересекающая AB и CD. Прямая AC по отношению к AB и CD называется *секущей*. Если точки B и D лежат в одной полуплоскости относительно прямой AC, то углы BAC и DCA называются *внутренними односторонними*. Если точки B и D лежат в разных полуплоскостях относительно прямой AC, то углы BAC и DCA называются *внутренними накрест лежащими*.

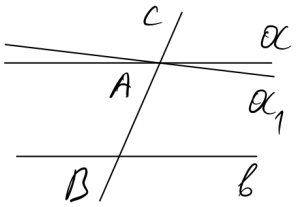


Секущая AC образует с прямыми AB и CD две пары внутренних односторонних и две пары внутренних накрест лежащих углов. Из свойства смежных углов следует, что если внутренние накрест лежащие углы одной пары равны, то внутренние накрест лежащие углы другой пары тоже равны, а сумма внутренних односторонних углов каждой пары равна 180°. Обратно, если сумма внутренних односторонних углов одной пары равна 180°, то сумма внутренних односторонних углов другой пары тоже равна 180°, а внутренние накрест лежащие углы каждой пары равны.

Теорема 46. Пусть a и b – две прямые, а c – их секущая. Тогда если прямые a и b параллельны, то внутренние накрест лежащие углы равны, а сумма внутренних

односторонних углов равна 180°. Обратно, если внутренние накрест лежащие углы равны или сумма внутренних односторонних углов равна 180°, то прямые *a* и *b* параллельны.

Доказательство. Начнём со второго утверждения теоремы. Допустим, что прямые *a* и *b* не параллельны (¬), следовательно, они пересекаются в некоторой точке *C* (опр. 21). Углы *CAB* и *CBA* являются внутренними односторонними (опр. 39) и по условию их сумма равна 180°. Но сумма двух углов в треугольнике *ABC* не может быть равна 180° так как это противоречит теореме 38 ⊗. Следовательно, прямая *a* параллельна *b*.



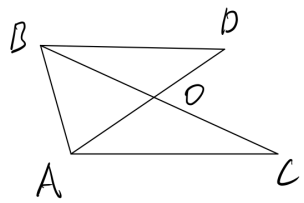
Докажем первое утверждение теоремы. Пусть *a* || *b*, но сумма внутренних односторонних углов не равна 180° (¬). Проведём через точку *A* прямую a_1 так, чтобы сумма внутренних односторонних углов секущей *c* с прямыми a_1 и *b* была равна 180° (акс. VIII). Тогда по доказанному a_1 || *b*. Но через точку *A* может проходить только одна прямая, параллельная *b* (акс. X) ⊗. Следовательно, сумма внутренних односторонних углов при прямых *a* и *b* и секущей с, равна 180°, а внутренние накрест лежащие углы равны. Теорема доказана.

Из теоремы 46 следует, что *две прямые, перпендикулярные третьей, параллельны. Если прямая перпендикулярна одной из двух параллельных прямых, то она перпендикулярна и другой.*

2. Сумма углов треугольника

Теорема 47. Сумма углов треугольника равна 180°.

Доказательство. Пусть *ABC* – данный треугольник. Отметим середину *O* стороны *BC* треугольника (т. 6). Так как точка *O* принадлежит отрезку *BC* (опр. 6), она разделяет точки *B* и *C* (опр. 3), следовательно, полупрямые *OB* и *OC* – дополнительные (т. 11 и опр. 9). Отложим на полупрямой, дополнительной полупрямой *OA*, отрезок *OD*, равный отрезку *OA* (т. 14 и акс. V). Рассмотрим треугольники *BOD* и *COA*. В них углы при вершине *O* равны как вертикальные (опр. 23 и т. 30), *OB* = *OC* так как точка *O* – середина (опр. 6), *OA* = *OD* по построению, следовательно, Δ*BOD* = Δ*COA* (акс. IX) ⇒ ∠*DBO* = ∠*ACO* (опр. 20). Точки *O* и *C* лежат по одну сторону от точки *B*, следовательно, лучи *BO* и *BC* совпадают (следствие из т. 11). Аналогично лучи *CO* и *CB* совпадают. Значит, ∠*DBC* = ∠*ACB* **(*)**.



Точки *A* и *D* принадлежат разным полупрямым с начальной точкой *O*, следовательно, они разделяются этой точкой (т. 11) ⇒ точка *O* принадлежит

отрезку AD (опр. 3) ⇒ отрезок AD пересекает прямую BC в точке O (опр. 3 и 7) ⇒ точки A и D лежат в разных полуплоскостях относительно прямой BC (т. 8) ⇒ углы DBC и ACB внутренние накрест лежащие при прямых AC и BD и секущей BC (опр. 39), из доказанного выше равенства этих углов (*) следует, что $AC \parallel BD$ (т. 46).

Отрезок AD лежит в полуплоскости точки D относительно прямой AB (т. 10) ⇒ точка O лежит в одной полуплоскости с точкой D. Отрезок BC лежит в полуплоскости точки C, относительно прямой AB (т. 10) ⇒ точка O лежит в одной полуплоскости с точкой C. Так как D лежит в одной полуплоскости с O, и C лежит в одной полуплоскости с O (следствие из т. 8.1), то точки D и C лежат в одной полуплоскости относительно прямой AB ⇒ углы DBA и CAB являются внутренними односторонними при прямых BD и AC и секущей AB (опр. 39).

$AC \parallel BD \Rightarrow \angle DBA + \angle CAB = 180°$ (т. 46) **(**)**.

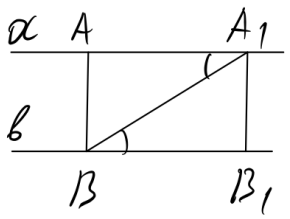
точка O принадлежит отрезку AD и лучу BC (т. 3) ⇒ луч BC пересекает отрезок AD в точке O ⇒ луч BC проходит между сторонами угла DBA (опр. 16) ⇒ $\angle DBA = \angle DBC + \angle ABC$ (акс. VII) – подставляем в (**):
$\angle DBC + \angle ABC + \angle CAB = 180°$, с учётом (*)
$\angle ACB + \angle ABC + \angle CAB = 180°$, то есть сумма углов треугольника ABC равна 180°.
Теорема доказана.

Из теоремы 47 следует, что *в прямоугольном треугольнике острые углы дополняют друг друга до 90°.* Из теорем 47 и 36 *следует, что в равностороннем треугольнике все углы равны 60°.*

Теорема 48. Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних углов, не смежных с ним.
Доказательство. Пусть ABC – данный треугольник, по теореме 47 $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$, следовательно, $\angle A + \angle B = 180° - \angle C$. В правой части равенства градусная мера внешнего угла при вершине C (опр. 33 и след. 1 т. 27), а в левой – сумма двух несмежных с ним углов треугольника. Теорема доказана.

3. Параллельные прямые как равноотстоящие прямые

Теорема 49. Параллельные прямые равноотстоящие, то есть все точки одной прямой находятся на одном и том же расстоянии от другой прямой.
Доказательство. Пусть a и b – две параллельные прямые. Отметим на прямой a две произвольные точки A и A_1, и опустим из них перпендикуляры AB и A_1B_1 на прямую b (т. 44). Прямые AB и A_1B_1 перпендикулярны прямой b (опр. 29), следовательно, они



перпендикулярны и прямой *a* (следствие из т. 46). Значит, треугольники BAA_1 и A_1B_1B прямоугольные с прямыми углами *A* и B_1 (опр. 35). Все остальные углы этих треугольников – острые (следствие из т. 38).

Углы BA_1A и A_1BB_1 являются либо внутренними односторонними, либо внутренними накрест лежащими относительно секущей A_1B (опр. 39). Так как оба этих угла являются острыми углами в прямоугольных треугольниках BAA_1 и A_1B_1B (опр. 19), то их сумма не может быть равна 180° (опр. 32), поэтому эти углы не могут быть внутренними односторонними. Значит, углы BA_1A и A_1BB_1 внутренние накрест лежащие при параллельных прямых *a* и *b*, и поэтому эти углы равны (т. 46).

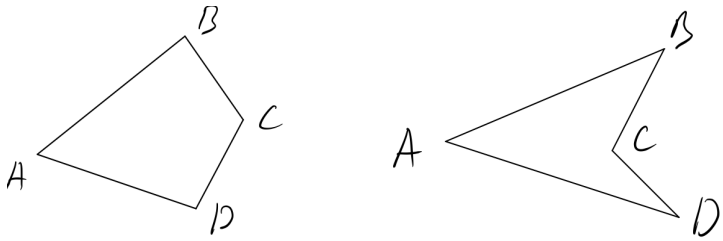
Прямоугольные треугольники BAA_1 и A_1B_1B равны по гипотенузе и острому углу (т. 43), следовательно, $AB = A_1B_1$ (опр. 20). Значит, расстояние от любой точки прямой *a* до прямой *b* одно и тоже (опр. 38), аналогично доказывается и обратное. Теорема доказана.

Определение 40. *Расстоянием между параллельными прямыми* называется расстояние от какой-нибудь точки одной прямой до другой прямой.

§8. Четырёхугольники

1. Выпуклые четырёхугольники

Определение 41. *Четырёхугольником* называется фигура, которая состоит из четырёх точек, каждые три из которых не лежат на одной прямой, и четырёх соединяющих эти точки отрезков. При этом каждая точка является концом ровно двух из отрезков, и отрезки не пересекаются друг с другом. Данные точки называются *вершинами* четырёхугольника, а соединяющие их отрезки – *сторонами* четырёхугольника.



Определение 42. Вершины четырёхугольника называются *соседними*, если они являются концами одной из его сторон. Вершины, не являющиеся соседними, называются *противолежащими*. Стороны четырёхугольника, исходящие из одной вершины, называются *соседними сторонами*. Стороны, не имеющие общего конца, называются *противолежащими сторонами*.

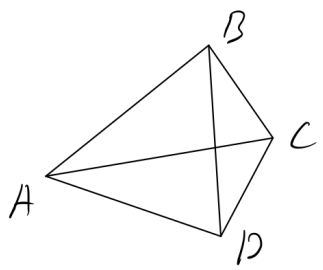
Определение 43. Отрезки, соединяющие противолежащие вершины четырёхугольника, называются *диагоналями*.

Определение 44. Четырёхугольник называются *выпуклым*, если он расположен в одной полуплоскости относительно любой прямой, содержащей его сторону. При этом сторона, лежащая на данной прямой, и её концы не учитываются.

Четырёхугольник обозначается указанием его вершин. Например, четырёхугольник *ABCD*. В обозначении четырёхугольника стоящие рядом буквы должны обозначать соседние вершины.

Определение 45. *Углом выпуклого четырёхугольника ABCD при вершине A* называется угол, образованный полупрямыми *AB* и *AD*. Углы при других вершинах определяются аналогично.

Теорема 50. Диагонали выпуклого четырёхугольника пересекаются. Обратно, если диагонали четырёхугольника пересекаются, то он выпуклый.
Доказательство. Пусть *ABCD* – данный выпуклый четырёхугольник. Точки *B* и *C* лежат в одной полуплоскости относительно прямой *AD* (опр. 44). Значит, и полупрямые *AC* и *AB* лежат в одной полуплоскости относительно прямой *AD* (т. 9). По теореме 24 либо луч *AC* проходит между сторонами угла *BAD*, либо луч *AB* проходит между сторонами угла *CAD*. Но луч *AB* не может проходить между сторонами угла *CAD* (и разделять их по теореме 22) так как точки *C* и *D* лежат в одной полуплоскости относительно прямой *AB* (опр. 44).



Следовательно, луч *AC* проходит между сторонами угла *BAD*, а, значит, отрезок *BD* пересекается с прямой *AC* (т. 23). Итак, диагональ BD (опр. 43) пересекается с прямой AC.

Таким же способом, рассматривая углы *ABC* и *ABD*, доказываем, что диагональ *AC* пересекает прямую *BD*. Так как диагональ *BD* пересекается с прямой *AC*, то прямые *BD* и *AC* пересекаются. Но эти прямые могут иметь только одну точку пересечения (т. 2). На прямой *AC* эта точка принадлежит отрезку *AC*, а на прямой *BD* – отрезку *BD*, следовательно, диагонали *AC* и *BD* пересекаются.

Докажем обратное утверждение. Пусть *ABCD* – четырёхугольник и диагональ *AC* пересекается с диагональю *BD* в точке *O*. Отрезок *AC* лежит в полуплоскости точки *C*, а отрезок *BD* лежит в полуплоскости точки *D* относительно прямой *AB* (т. 10). Так как точка *O* принадлежит обоим этим отрезкам, то *AC* и *BD* лежат в одной полуплоскости (полуплоскости точки *O*), а, значит, в ней лежат и их концы *C* и *D*. Тогда и отрезок *CD* лежит в одной полуплоскости относительно прямой *AB* (т. 16), и в ней же лежат отрезки *AD* и *BC* (т. 10). Таким образом, весь четырёхугольник

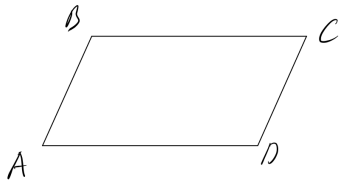
ABCD лежит в одной полуплоскости относительно прямой, содержащей его сторону *AB*. Аналогично доказывается, что *ABCD* лежит в одной полуплоскости относительно прямых, содержащих три другие его стороны. Следовательно, *ABCD* – выпуклый четырёхугольник (опр. 44). Теорема доказана.

Теорема 51. Сумма углов выпуклого четырёхугольника равна 360°.
Доказательство. Пусть *ABCD* – данный выпуклый четырёхугольник. Полупрямая *DB* проходит между сторонами угла *ADC*, так как пересекает отрезок *AC* (т. 50, т. 3, опр. 16). Поэтому $\angle ADC = \angle ADB + \angle CDB$ (акс. VII). Точно также доказывается, что $\angle ABC = \angle ABD + \angle CBD$. Отсюда следует, что сумма углов четырёхугольника *ABCD* равна сумме углов треугольников *BAD* и *BCD* (опр. 19 и 45), то есть 360° (т. 47). Теорема доказана.

2. Параллелограмм

Два отрезка называются *параллельными*, если они лежат на параллельных прямых.

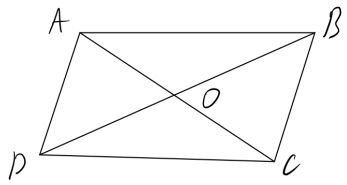
Пусть *a* и *b* – две параллельные прямые. Отметим на прямой *a* точку *A* и проведём через неё прямую, пересекающую прямую *b* в некоторой точке *B*. Отметим на прямой *a* точку *D* и проведём через неё прямую, параллельную прямой *AB*, она будет пересекать прямую *b* в некоторой точке *C*. Тогда *ABCD* – четырёхугольник у которого противолежащие стороны попарно параллельны, то есть лежат на параллельных прямых.



Определение 46. *Параллелограмм* – это четырёхугольник, у которого противолежащие стороны параллельны.

Теорема 52. Параллелограмм есть выпуклый четырёхугольник.
Доказательство. Пусть *ABCD* – данный параллелограмм. Возьмём, например, его сторону *AD*. По определению $BC \parallel AD$, следовательно, все точки прямой *BC*, включая отрезок *BC*, лежат в одной полуплоскости относительно прямой *AD* (т. 29). В этой же полуплоскости лежат отрезки *AB* и *CD* (т. 10). Следовательно, весь параллелограмм, не считая стороны *AD* и её концов, лежит в одной полуплоскости относительно прямой *AD*. Аналогично можно проверить данное свойство для всех других сторон. Таким образом, параллелограмм есть выпуклый четырёхугольник (опр. 44). Теорема доказана.

Теорема 53. У параллелограмма противолежащие стороны равны, противолежащие углы равны.
Доказательство. Пусть *ABCD* – данный параллелограмм. Его диагонали *AC* и *BD* (опр. 42 и 43) пересекаются в некоторой точке (т. 52 и 50), и, значит, отрезок *BD* пересекается с прямой *AC* (опр. 7) ⇒ точки *B* и *D* лежат в разных полуплоскостях

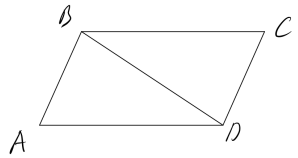


относительно прямой AC (т. 8) $\Rightarrow \angle BCA = \angle DAC$ как накрест лежащие при параллельных прямых AD и BC и секущей AC (опр. 39 и 46, т. 46). Аналогично доказывается, что $\angle BAC = \angle DCA$. Рассмотрим теперь треугольники ACB и CAD. У них сторона AC – общая, $\angle BCA = \angle DAC$, $\angle BAC = \angle DCA \Rightarrow \Delta ACB = \Delta CAD$ (т. 32) $\Rightarrow BC = AD$, $\angle ABC = \angle CDA$, $AB = DC$ (опр. 20).

Теперь $\Delta ADB = \Delta BCD$ (т. 37) $\Rightarrow \angle DAB = \angle BCD$ (опр. 20). Теорема доказана.

Теорема 54. Диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам.
Доказательство. Пусть $ABCD$ – данный параллелограмм и O – точка пересечения его диагоналей. Рассмотрим треугольники AOD и COB. В них $BC = AD$ по теореме 53, $\angle OBC = \angle ODA$ как накрест лежащие при параллельных прямых AD и BC и секущей BD (опр. 39 и 46, т. 46), $\angle OCB = \angle OAD$ как накрест лежащие при параллельных прямых AD и BC и секущей AC. Следовательно, $\Delta AOD = \Delta COB$ (т. 32) $\Rightarrow OB = OD$ и $OA = OC$ (опр. 20). Теорема доказана.

Теорема 55. 1) Если у выпуклого четырёхугольника две противолежащие стороны параллельны и равны, то четырёхугольник есть параллелограмм. 2) Если у выпуклого четырёхугольника противолежащие стороны равны, то этот четырёхугольник есть параллелограмм. 3) Если диагонали выпуклого четырёхугольника точкой пересечения делятся пополам, то четырёхугольник есть параллелограмм.
Доказательство. Пусть $ABCD$ – данный выпуклый четырёхугольник, тогда его диагонали AC и BD (опр. 42 и 43) пересекаются (т. 50), следовательно, точки A и C лежат в разных полуплоскостях относительно прямой BD (опр. 7 и т. 8). Значит, углы ABD и CDB являются внутренними накрест лежащими при прямых AB и CD и секущей BD, а углы CBD и ADB – внутренними накрест лежащими при прямых AD и BC и секущей BD (опр. 39).

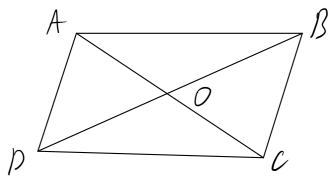


В случае первого утверждения теоремы $AD \parallel BC$ и $AD = BC$, тогда $\angle CBD = \angle ADB$ как накрест лежащие углы при параллельных прямых и треугольники ABD и CDB равны по первому признаку равенства (акс. IX, т. 46) $\Rightarrow \angle ABD = \angle CDB$ (опр. 20) $\Rightarrow CD \parallel AB$ (т. 46) $\Rightarrow ABCD$ – параллелограмм (опр. 46).

В случае второго утверждения теоремы $AB = CD$ и $AD = BC$, тогда $\Delta ABD = \Delta CDB$ по третьему признаку равенства (т. 37). Из равенства треугольников следует

равенство накрест лежащих углов $\angle CBD = \angle ADB$ и $\angle ABD = \angle CDB$ (опр. 20), а, значит, $BC \parallel AD$ и $CD \parallel AB$ (т. 46) $\Rightarrow ABCD$ – параллелограмм (опр. 46).

В случае третьего утверждения теоремы $AO = OC$ и $BO = OD$. Точка O принадлежит отрезкам AC и BD, следовательно, полупрямые OA и OC, OB и OD являются дополнительными (следствие из т. 11). Значит, углы AOD и COB равны как вертикальные (опр. 23 и т. 30). Тогда $\Delta AOD = \Delta COB$ по первому признаку равенства $\Rightarrow AD = BC$ и $\angle ADO = \angle CBO$. Эти углы совпадают с внутренними накрест лежащими углами ADB и CBD, поэтому из их равенства следует, что $AD \parallel BC$. Тогда по доказанному первому утверждению теоремы четырёхугольник $ABCD$ – параллелограмм. Теорема доказана.



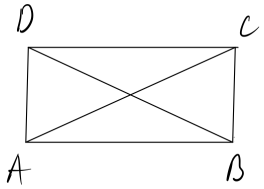
3. Прямоугольник. Ромб. Квадрат

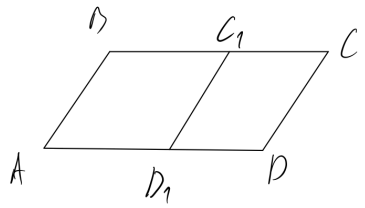
Пусть a и b – две параллельные прямые. Отметим на прямой a точки A и B и проведём через них прямые, перпендикулярные прямой a. Эти прямые также будут перпендикулярны и прямой b, которую пересекут в некоторых точках C и D. Тогда $ABCD$ это четырёхугольник у которого все углы прямые.

Определение 47. *Прямоугольник* – это четырёхугольник у которого все углы прямые.

Теорема 56. Прямоугольник есть параллелограмм. Диагонали прямоугольника равны.

Доказательство. Пусть $ABCD$ – данный прямоугольник. Так как все его углы прямые (опр. 47), то $AD \perp AB$ и $BC \perp AB$ (опр. 25) $\Rightarrow AD \parallel BC$ (следствие из т. 46); $AD \perp AB$ и $AD \perp CD \Rightarrow AB \parallel CD$. Получаем, что $ABCD$ – параллелограмм (опр. 46). По свойству параллелограмма $AB = DC$ (т. 53) $\Rightarrow$ треугольники BAD и CDA равны по первому признаку (акс. IX) $\Rightarrow BD = AC$. Теорема доказана.

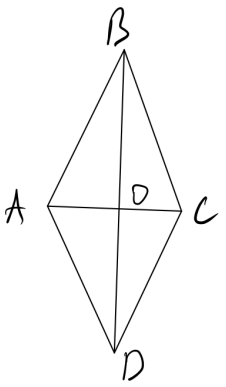




Пусть $ABCD$ – параллелограмм, у которого сторона BC больше стороны AB. Отложим на полупрямых BC и AD отрезки BC_1 и AD_1, равные стороне AB. Тогда четырёхугольник ABC_1D_1 это параллелограмм у которого все стороны равны.

Определение 48. *Ромб* – это параллелограмм, у которого все стороны равны.

Теорема 57. Диагонали ромба пересекаются под прямым углом. Полупрямые, исходящие из вершин ромба и содержащие его диагонали, являются биссектрисами его углов.



Доказательство. Пусть $ABCD$ – данный ромб, O – точка пересечения диагоналей ромба. Рассмотрим треугольники AOB и COB. У них сторона OB – общая, $AO = OC$ (т. 54 и опр. 48), $AB = BC$ (опр. 48) $\Rightarrow \Delta AOB = \Delta COB$ (т. 37) $\Rightarrow \angle ABO = \angle CBO$ и $\angle AOB = \angle COB$ (опр. 20). Углы AOB и COB смежные (опр. 22) и равные, следовательно, каждый из них равен 90° (т. 27), то есть является прямым (опр. 24). Луч BD пересекает отрезок AC в точке O (т. 3) и, следовательно, проходит между сторонами угла ABC (опр. 16). Тогда из равенства углов ABO и CBO следует, что BD – биссектриса угла ABC (опр. 18). Теорема доказана.

Определение 49. *Квадрат* – это прямоугольник, у которого все стороны равны.

Квадрат является ромбом, поэтому обладает свойствами прямоугольника и ромба.

4. Теорема Фалеса

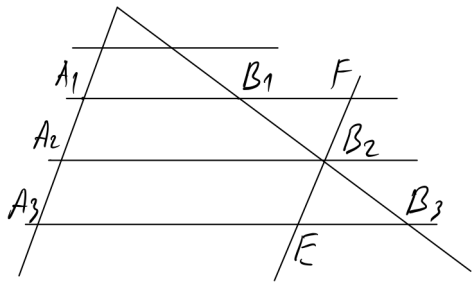
Лемма 6. Пусть три параллельные прямые A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 пересекают прямую a в точках A_1, A_2, A_3, а прямую b в точках B_1, B_2, B_3. Тогда если точка A_2 лежит между точками A_1 и A_3, то точка B_2 лежит между точками B_1 и B_3.

Доказательство. Отрезок A_1A_3 пересекается с прямой A_2B_2 в точке A_2 (опр. 3 и 7), следовательно, точки A_1 и A_3 лежат в разных полуплоскостях относительно этой прямой (т. 8). Точки A_1 и B_1 лежат по одну сторону от прямой A_2B_2 так как прямая A_1B_1 параллельна прямой A_2B_2 (т. 29). Точно также точки A_3 и B_3 лежат по одну сторону от прямой A_2B_2. Значит, точки B_1 и B_3 лежат по разные стороны от этой прямой, и поэтому отрезок B_1B_3 пересекает прямую A_2B_2. Единственная общая точка прямых B_1B_3 и A_2B_2 это в точка B_2 (т. 2), следовательно, она принадлежит отрезку B_1B_3 (лемма 1). Следовательно, точка B_2 лежит между точками B_1 и B_3 (опр. 3). Лемма доказана.

Замечание. Доказательство остаётся верным, если точки A_1 и B_1 совпадают и мы имеем две параллельные прямые A_2B_2 и A_3B_3, пересекающие стороны угла $A_2A_1B_2$.

Теорема 58 (Фалес). Если параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают на одной его стороне равные отрезки, то они отсекают равные отрезки и на другой стороне.

Доказательство. Пусть A_1, A_2, A_3 – точки пересечения параллельных прямых с одной из сторон угла и A_2 лежит между A_1 и A_3. Пусть B_1, B_2, B_3 – соответствующие точки пересечения этих прямых с другой стороной угла. Докажем, что если $A_1A_2 = A_2A_3$, то $B_1B_2 = B_2B_3$.



Точка B_2 лежит между B_1 и B_3 (лемма 6). Проведём через точку B_2 прямую EF, параллельную прямой A_1A_3 (т. 28). Тогда $A_1A_2B_2F$ и $A_2A_3EB_2$ – параллелограммы (опр. 46) и по свойству параллелограмма $A_1A_2 = FB_2$, $A_2A_3 = B_2E$ (т. 53). И так как $A_1A_2 = A_2A_3$, то $FB_2 = B_2E$.

Точки F и E лежат в разных полуплоскостях относительно прямой A_2B_2 так как они лежат на прямых A_1B_1 и A_3B_3, лежащих в разных полуплоскостях (т. 29). Следовательно, полупрямые B_2F и B_2E различные (т. 9) и дополнительные (опр. 9). Аналогично полупрямые B_2B_1 и B_2B_3 тоже дополнительные. Следовательно, углы B_1B_2F и EB_2B_3 равны как вертикальные (опр. 23 и т. 30).

Отрезок B_1B_3 пересекает прямую EF в точке B_2, следовательно, точки B_1 и B_2 лежат в разных полуплоскоскостях относительно прямой EF (т. 8). Тогда углы B_2FB_1 и B_2EB_3 равны как внутренние накрест лежащие при параллельных прямых A_1B_1 и A_3B_3 и секущей EF (опр. 39 и т. 46).

Из установленных выше равенств следует, что треугольники B_2B_1F и B_2B_3E равны по второму признаку (т. 32). Из равенства этих треугольников следует равенство сторон $B_1B_2 = B_2B_3$ (опр. 20). Теорема доказана.

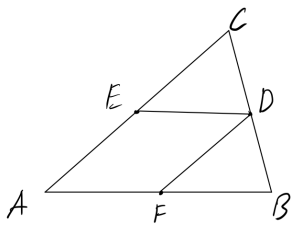
Замечание. Одним из концов отрезков в теореме Фалеса (и лемме 6) может быть вершина угла A. Тогда, если $AA_1 = A_1A_2$, то $AB_1 = B_1B_2$. Для доказательства достаточно провести через точку A прямую, параллельную A_1B_1.

5. Точка пересечения медиан треугольника

Определение 50. *Средней линией треугольника* называется отрезок, соединяющий середины двух его сторон.

Теорема 59. Средняя линия треугольника, соединяющая середины двух данных сторон, параллельна третьей стороне и равна её половине.

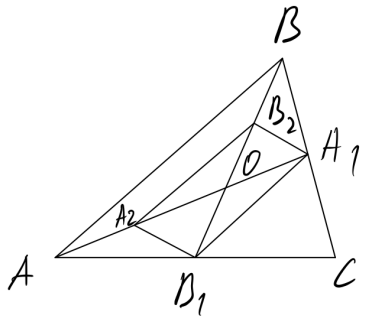
Доказательство. Пусть DE – средняя линия треугольника ABC. Проведём через точку D прямую, параллельную AB (т. 28). По теореме 58 она пересекает отрезок AC в его середине, то есть содержит среднюю линию DE. Первое утверждение доказано.



Проведём теперь среднюю линию DF. Она параллельна стороне AC. Четырёхугольник $AEDF$ – параллелограмм (опр. 46). По свойству параллелограмма $ED = AF$ (т. 53), а так как $AF = FB$ (опр. 6), то $ED = AB/2$. Теорема доказана.

Теорема 60. Все три медианы треугольника пересекаются в одной точке. Эта точка делит каждую медиану в отношении 2:1, считая от вершины.

Доказательство. Пусть ABC – данный треугольник. Проведём медианы AA_1 и BB_1.



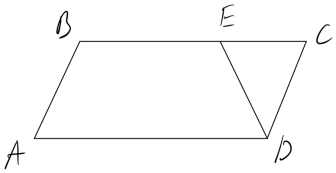
Докажем сначала, что эти медианы пересекаются. Отрезок AC лежит в полуплоскости точки C относительно прямой AA_1 (т. 10). Значит, точки C и B_1 лежат в одной полуплоскости относительно прямой AA_1. Отрезок BC пересекается с прямой AA_1 в точке A_1 (опр. 6 и 7), следовательно, точки C и B лежат в разных полуплоскостях относительно прямой AA_1 (т. 8). Значит, точки B и B_1 лежат в разных полуплоскостях. Поэтому медиана BB_1 пересекается с прямой AA_1. Аналогично доказываем, что медиана AA_1 пересекается с прямой BB_1. Так как прямые AA_1 и BB_1 пересекаются только в одной точке (т. 2), то эта точка принадлежит и медиане AA_1, и медиане BB_1, то есть эти медианы пересекаются в некоторой точке O.

Проведём среднюю линию A_1B_1 треугольника ABC и среднюю линию A_2B_2 треугольника AOB. Обе они параллельны стороне AB, а, значит, и друг другу (т. 45), и равны половине этой стороны (т. 59).

Точка B_2 принадлежит отрезку OB так как является его серединой (опр. 50 и 6), следовательно, она принадлежит лучу OB (т. 3), дополнительному лучу OB_1. Тогда точка O разделяет точки B_2 и B_1 (т. 11). Аналогично доказывается, что точка O разделяет точки A_2 и A_1. Следовательно, диагонали A_1A_2 и B_1B_2 (опр. 43) четырёхугольника $A_1B_1A_2B_2$ пересекаются в точке O, и этот четырёхугольник выпуклый (т. 50). Тогда из того, что отрезки A_1B_1 и A_2B_2 параллельны и равны следует, что четырёхугольник $A_1B_1A_2B_2$ – параллелограмм (т. 55). По свойству параллелограмма $B_1O = OB_2$ (т. 54), по построению $OB_2 = B_2B$, таким образом, $BO = BB_2 + OB_2 = 2OB_2 = 2OB_1$, то есть медиана AA_1 делит медиану BB_1 в отношении 2:1, считая от вершины B. Медиана, проведённая из точки C, делит медиану BB_1 в том же отношении, поэтому и она проходит через точку O. Теорема доказана.

6. Трапеция

Пусть $ABCD$ – параллелограмм. Отметим на отрезке BC некоторую точку E. Тогда $ABED$ – это выпуклый четырёхугольник у которого только две противолежащие стороны параллельны.

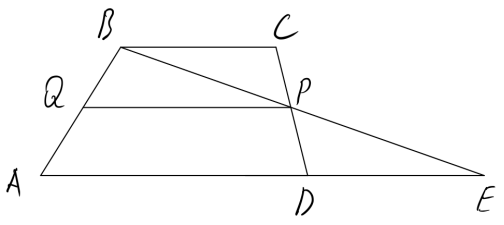


Определение 51. *Трапецией* называется выпуклый четырёхугольник, у которого только две противолежащий стороны параллельны. Эти параллельные стороны называются *основаниями* трапеции. Две другие стороны называются *боковыми*

сторонами трапеции. Трапеция, у которой боковые стороны равны, называется *равнобокой*.

Определение 52. Отрезок, соединяющий середины боковых сторон трапеции, называется *средней линией трапеции*.

Теорема 61. Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.



Доказательство. Пусть *ABCD* – данная трапеция с основаниями *AD* и *BC*; *QP* – средняя линия трапеции. Проведём через точку *P* прямую, параллельную основаниям трапеции (т. 28 и 45). Тогда по теореме 58 эта прямая пересечёт сторону *AB* в точке *Q*, то есть прямая, параллельная основаниям трапеции, содержит среднюю линию *QP*. Следовательно *QP* || *BC* || *AD*. Первое утверждение теоремы доказано.

Проведём через вершину *B* и середину *P* боковой стороны *CD* прямую. Она пересекает прямую *AD* в некоторой точке *E* (следствие из т. 45). Поскольку отрезок *AB* пересекается с прямой *QP* в точке *Q*, точки *A* и *B* лежат в разных полуплоскостях, относительно прямой *QP* (т. 8). Тогда и прямые *BC* и *AD* лежат в разных полуплоскостях относительно *QP* (т. 29). Значит, точки *B* и *E* лежат в разных полуплоскостях относительно *QP*, что возможно только если отрезок *BE* пересекает прямую *QP* (т. 8) в точке *P* (лемма 1). Тогда полупрямые *PB* и *PE* являются дополнительными (т. 11 и опр. 9). Так как середина *P* принадлежит отрезку *CD* (опр. 6), полупрямые *PC* и *PD* тоже дополнительные. Значит, углы *BPC* и *EPD* – вертикальные (опр. 23). Поскольку отрезок *BE* пересекает прямую *CD* в точке *P*, точки *B* и *E* лежат в разных полуплоскостях относительно *CD* и, следовательно, углы *BCP* и *EDP* внутренние накрест лежащие при параллельных прямых *BC* и *AD* и секущей *CD* (опр. 39).

Так как четырёхугольник *ABCD* – выпуклый, точки *A* и *B* лежат в одной полуплоскости относительно прямой *CD* (опр. 44), следовательно, точки *A* и *E* лежат в разных полуплоскостях. Значит, отрезок *AE* пересекается с прямой *CD* в точке *D* (лемма 1). То есть, точка *D* принадлежит отрезку *AE,* следовательно, *AE* = *AD* + *DE* (акс. IV).

Рассмотрим треугольники *PBC* и *PED*. В них *CP* = *DP* так как *P* – середина отрезка *CD* (опр. 6), ∠*BPC* = ∠*EPD* как вертикальные (т. 30), ∠*BCP* = ∠*EDP* как внутренние накрест лежащие (т. 46), следовательно, Δ*PBC* = Δ*PED* по второму признаку (т. 32). Из равенства треугольников следует равенство сторон *PB* = *PE, BC* = *ED* (опр. 20). Значит, точка *P* – середина отрезка *BE* и поэтому средняя линия трапеции *QP*

является также средней линией треугольника *ABE* (опр. 50). По теореме 59 $PQ = \frac{AE}{2} = \frac{AD + DE}{2} = \frac{AD + BC}{2}$. Теорема доказана.

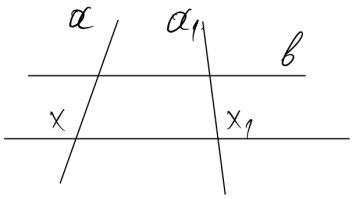
§9. Движение. Равенство фигур

1. Понятие движения

Определение 53. Пусть даны две фигуры F и F_1. Мы будем говорить, что между точками фигур установлено *взаимно однозначное соответствие*, если точки фигур объединены в пары (X, X_1) так, что каждая точка X фигуры F и каждая точка X_1 фигуры F_1 принадлежит одной и только одной паре. Точки X и X_1 фигур будем называть *соответствующими точками*.

Вместо взаимно однозначного соответствия между точками фигур F и F_1 можно говорить о *взаимно однозначном отображении* фигуры F на фигуру F_1.

Пример. Пусть фигура F есть прямая a, а фигура F_1 есть прямая a_1. Пусть, далее, b – прямая, пересекающая прямые a и a_1. Произвольная прямая, параллельная b, пересекает прямую a в некоторой точке X, а прямую a_1 в некоторой точке X_1. Объединим каждые такие две точки в пару (X, X_1). Это объединение точек в пары есть взаимно однозначное соответствие между прямыми a и a_1.



Взаимно однозначное отображение фигуры F на себя (то есть когда точкам фигуры ставятся в соответствие точки этой же фигуры) называется *преобразованием* фигуры F.

Определение 54. Взаимно однозначное отображение (преобразование) плоскости на себя называется *движением*, если оно сохраняет расстояние между точками, то есть переводит (ставит в соответствие) любые две точки X и Y плоскости в точки X_1 и Y_1 плоскости так, что $XY = X_1Y_1$.

2. Свойства движения

Теорема 62. При движении точки, лежащие на прямой, переходят в точки, лежащие на прямой, и сохраняется порядок их взаимного расположения.

Доказательство. Пусть точки A, B, C, лежащие на прямой, переходят в точки A_1, B_1, C_1. Докажем, что тогда точки A_1, B_1, C_1 тоже лежат на одной прямой, и если точка B лежит между точками A и C, то точка B_1 лежит между точками A_1 и C_1.

Одна из трёх точек A, B, C лежит между двумя другими. Пусть, например, B лежит между точками A и C. Тогда по аксиоме IV $AC = AB + BC$ и поскольку при движении сохраняются расстояния между точками $A_1C_1 = A_1B_1 + B_1C_1$ (опр. 54). Значит, точки

A_1, B_1, C_1 лежат на одной прямой и если точка B лежит между A и C, то точка точка B_1 лежит между A_1 и C_1 (следствие из т. 41). Теорема доказана.

Пусть задано некоторое движение. Тогда, если F – произвольная фигура на плоскости, точки, соответствующие при движении точкам фигуры F, образуют некоторую фигуру F_1. Относительно фигуры F_1 мы будем говорить, что она *получена движением из фигуры F*. Мы будем говорить также, что при движении фигура *F переходит в фигуру* F_1.

Из теоремы 62 следует, что *при движении прямые переходят в прямые, полупрямые – в полупрямые, отрезки – в отрезки*.

Поясним это на примере отрезка. Пусть AB – данный отрезок. При движении точки A и B переходят в некоторые точки A_1 и B_1. Покажем, что отрезок AB переходит в отрезок A_1B_1. Возьмём произвольную точку X на отрезке AB. Она переходит в некоторую точку X_1 прямой A_1B_1, лежащую между точками A_1 и B_1 (т. 62), то есть точка X отрезка AB переходит в точку X_1 отрезка A_1B_1. Для всякой ли точки X_1 отрезка A_1B_1 найдётся точка X отрезка AB? Да, если взять такую точку X отрезка AB, что $AX = A_1X_1$, то она как раз и переходит в точку X_1. Таким образом, между точками отрезка AB и точками отрезка A_1B_1 установлено взаимно однозначное соответствие.

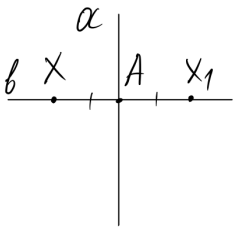
Пусть AB и AC – две полупрямые, исходящие из точки A и не лежащие на одной прямой. При движении эти полупрямые переходят в некоторые полупрямые A_1B_1 и A_1C_1. Так как движение сохраняет расстояния, то треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по третьему признаку равенства треугольников. Из равенства треугольников следует равенство углов BAC и $B_1A_1C_1$. Следовательно, *при движении сохраняются градусные меры углов*.

Пусть последовательно выполнены два движения. При первом движении произвольная точка X переходит в некоторую точку X_1, а при втором точка X_1 переходит в точку X_2. Поскольку при каждом движении расстояние между точками сохраняется, то преобразование плоскости, при котором произвольная точка X переходит в точку X_2, тоже сохраняет расстояние между точками, а, значит, является движением. Таким образом, *два движения, выполненные последовательно, дают снова движение*.

Пусть при движении произвольная точка X переходит в точку X_1. Преобразование плоскости при котором произвольная точка X_1 переходит в точку X, очевидно, тоже является движением. Такое движение называется *обратным* данному.

3. Симметрия относительно прямой

Определение 55. Пусть a – некоторая прямая и X – произвольная точка плоскости.



Проведём через точку X прямую b, перпендикулярную a. Она пересечёт прямую a в некоторой точке A. Построим теперь точку X_1 по следующему правилу. Если точка X лежит на прямой a, то X_1 совпадает с X. Если X не лежит на прямой a, то X_1 лежит в другой полуплоскости относительно прямой a на прямой b, причём расстояние AX_1 равно AX. Точка X_1 называется *симметричной* точке X относительно прямой a. Точка X является симметричной точке X_1 относительно прямой a.

Поскольку для любой точки X симметричная ей точка определена однозначно, и наоборот, каждая точка X_1 симметрична только одной точке X, то сопоставив каждой точке плоскости точку симметричную ей относительно некоторой прямой a, мы получим взаимно однозначное отображение плоскости на себя.

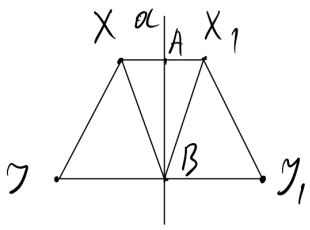
Определение 56. Преобразование плоскости при котором точке X сопоставляется точка X_1, симметричная относительно прямой a, называется *преобразованием симметрии* или *зеркальным отражением* относительно прямой a.

Теорема 63. Преобразование симметрии относительно прямой является движением.

Доказательство. Пусть X и Y две произвольные точки и X_1, Y_1 – симметричные им точки относительно прямой a. Требуется доказать, что $XY = X_1Y_1$ (опр. 54).

1) Рассмотрим случай, когда точки X и Y лежат в одной полуплоскости относительно прямой a, и не лежат на прямой, перпендикулярной a.

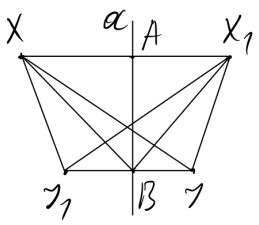
Прямая XX_1 пересекает прямую a в точке A, прямая YY_1 пересекает прямую a в точке B. Рассмотрим прямоугольные треугольники ABX и ABX_1. У них катет AB общий, $XA = X_1A$ по определению симметрии, следовательно, $\Delta ABX = \Delta ABX_1 \Rightarrow XB = X_1B$; $\angle XBA = \angle X_1BA$.



Лучи BX и BY отложены в одну полуплоскость, причём в прямоугольном треугольнике XBA угол XBA – острый, а угол YBA – прямой, следовательно $\angle XBA < \angle YBA \Rightarrow$ луч BX проходит между сторонами угла YBA (т. 25). Значит, $\angle YBA = \angle YBX + \angle XBA$. Аналогично доказывается, что $\angle Y_1BA = \angle Y_1BX_1 + \angle X_1BA$. Так как $\angle YBA = \angle Y_1BA$ и по доказанному $\angle XBA = \angle X_1BA$, то $\angle YBX = \angle Y_1BX_1$. С учётом доказанного равенства $XB = X_1B$ и равенства $YB = Y_1B$ (по определению симметрии), получаем, что $\Delta YBX = \Delta Y_1BX_1 \Rightarrow XY = X_1Y_1$.

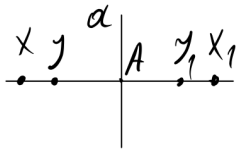
2) Рассмотрим случай, когда точки X и Y лежат в разных полуплоскоскостях относительно прямой a и не лежат на прямой, перпендикулярной a.

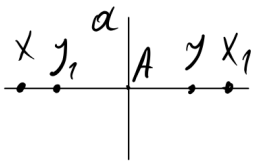
Аналогично первому случаю заключаем, что $\Delta ABX = \Delta ABX_1 \Rightarrow XB = X_1B$; $\angle XBA = \angle X_1BA$. Лучи BX и BY_1 отложены в одну полуплоскость, причём угол Y_1BA – прямой, а угол XBA – острый, следовательно $\angle XBA < \angle Y_1BA \Rightarrow$ луч BX проходит между сторонами угла Y_1BA. Тогда $\angle Y_1BA = \angle Y_1BX + \angle XBA$. Аналогично $\angle YBA = \angle YBX_1 + \angle X_1BA$. С учётом равенства $\angle XBA = \angle X_1BA$ получаем, что $\angle Y_1BX = \angle YBX_1$. Добавим к этому, что по доказанному $XB = X_1B$ и $BY_1 = BY$ по определению симметрии, и получаем что $\Delta XBY_1 = \Delta X_1BY \Rightarrow XY_1 = X_1Y$ и $\angle XY_1B = \angle X_1YB$, поскольку $YY_1 = Y_1Y$, то $\Delta XYY_1 = \Delta X_1Y_1Y$ по первому признаку $\Rightarrow XY = X_1Y_1$.



3) Рассмотрим случай, когда точки X и Y лежат в одной полуплоскости относительно прямой a на прямой, перпендикулярной a.

Пусть точка Y лежит между X и A. Тогда $XA = XY + YA$ **(*)** и $AY < AX$. По определению симметрии точки Y_1 и X_1 лежат на одной полупрямой с начальной точкой A и $AY_1 = AY$ и $AX_1 = AX \Rightarrow AY_1 < AX_1 \Rightarrow$ точка Y_1 лежит между A и X_1 (т. 13) $\Rightarrow X_1A = X_1Y_1 + Y_1A$. Сравнивая это выражение с (*) получаем, что $XY = X_1Y_1$.

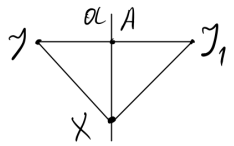




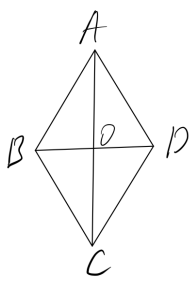
4) Рассмотрим случай, когда точки X и Y лежат в разных полуплоскостях относительно прямой a на прямой, перпендикулярной a.

Точки X и Y лежат в разных полуплоскостях, следовательно, они лежат на разных полупрямых с начальной точкой A и точка A лежит между точками X и Y (т. 9 и 11), тогда $XY = XA + AY$. Аналогично, поскольку точки X_1 и Y_1 тоже лежат в разных полуплоскостях, получаем $X_1Y_1 = X_1A + AY_1$. Поскольку $AX = AX_1$ и $AY = AY_1$, то $XY = X_1Y_1$.

5) Рассмотрим случай, когда одна из точек лежит на прямой a, а другая не лежит на этой прямой, причём проходящая через них прямая не перпендикулярна a.



Пусть, например, точка X лежит на прямой a, а точка Y нет. Тогда точки X и X_1 совпадают, $\Delta XAY = \Delta XAY_1 \Rightarrow XY = XY_1 \Rightarrow XY = X_1Y_1$.



6) Рассмотрим случай, когда одна из точек лежит на прямой *a*, а другая не лежит на прямой *a*, причём проходящая через них прямая перпендикулярна *a*.

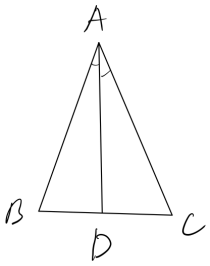
Пусть, например, точка *X* лежит на прямой *a*, а точка *Y* нет. По определению симметрии точка X_1 совпадает с *X* и $XY = XY_1 \Rightarrow XY = X_1Y_1$.

7) Рассмотрим случай, когда обе точки лежат на прямой *a*.

В этом случае точка *X* совпадает с X_1, и *Y* совпадает с Y_1, следовательно, $XY = X_1Y_1$. Теорема доказана.

<u>Определение 57</u>. Если при преобразование симметрии относительно некоторой прямой *a* фигура *F* переходит в себя, то эта фигура называется *симметричной*, а прямая *a* называется *осью симметрии* фигуры *F*.

<u>Пример</u>. Биссектриса угла при вершине равнобедренного треугольника является его осью симметрии.

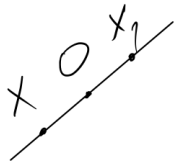


Пусть треугольник *ABC* равнобедренный с основанием *BC*. Биссектриса *AD* треугольника также является его высотой. Поэтому при симметрии относительно прямой *AD* точка *A* перейдёт с точку *A*, точка *C* перейдёт в точку *B*, а *B* в *C*. Таким образом, сторона *AC* перейдёт в *AB*, сторона *AB* в *AC*, *BC* в *CB*. То есть треугольник перейдёт в себя, следовательно, *AD* – его ось симметрии.

Прямые, на которых лежат диагонали ромба, являются его осями симметрии.

Диагонали ромба пересекаются под прямым углов, поэтому при симметрии относительно прямой *AC* точка *D* перейдёт в точку *B*, точка *B* в точку *D*, таким образом, сторона ромба *AD* перейдёт в *AB*, *AB* в *AD*, стороны *CB* и *CD* также перейдут друг в друга. Значит, весь ромб переходит в себя и, следовательно, прямая *AC* является его осью симметрии.

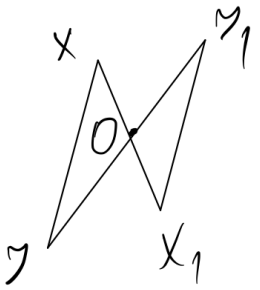
4. Симметрия относительно точки



<u>Определение 58</u>. Пусть *O* – некоторая точка плоскости и *X* – произвольная точка. Построим точку X_1 по следующему правилу. Если точка *X* совпадает с *O*, то X_1 есть точка *O*. Если точка *X* не совпадает с *O*, то точка X_1 принадлежит полупрямой, дополнительной полупрямой *OX*, причём расстояние OX_1 равно *OX*. Построенная так точка X_1 называется *симметричной X* относительно

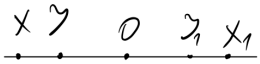
точки O. Преобразование плоскости, при котором каждой точке X по указанному правилу сопоставляется точка X_1, называется *преобразованием симметрии* относительно точки O.

Теорема 64. Преобразование симметрии относительно точки есть движение.
Доказательство. Пусть X и Y – две произвольные точки и X_1, Y_1 – симметричные им точки относительно точки O. Требуется доказать, что $XY = X_1Y_1$ (опр. 54).



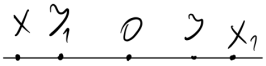
1) Рассмотрим случай, когда точки X и Y не совпадают с точкой O и не лежат с ней на одной прямой. Тогда существуют треугольники XOY и X_1OY_1 в которых углы при вершине O равны как вертикальные, стороны $X_1O = XO$ и $Y_1O = YO$ по определению симметрии. Значит, $\Delta XOY = \Delta X_1OY_1$ по первому признаку $\Rightarrow XY = X_1Y_1$.

2) Рассмотрим случай, когда точки X и Y не совпадают с точкой O и лежат с ней на одной прямой по одну сторону от O.



Пусть, например, точка Y лежит между X и O. Тогда $OY < OX$ и по определению $OY_1 = OY$, $OX_1 = OX \Rightarrow OY_1 < OX_1$. Значит, точка Y_1 лежит между O и X_1 на полупрямой дополнительной OX. Получаем, что $OX = XY + OY$ и $OX_1 = X_1Y_1 + OY_1 \Rightarrow XY = X_1Y_1$.

3) Рассмотрим случай, когда точки X и Y не совпадают с точкой O, лежат с ней на одной прямой по разные стороны от O. Тогда точки X и Y_1 лежат на одной полупрямой, а точки X_1 и Y на другой полупрямой с начальной точкой O. Значит, $XY = OX + OY$ и $X_1Y_1 = OX_1 + OY_1$. Поскольку $OX = OX_1$ и $OY = OY_1$, то $XY = X_1Y_1$.



4) Рассмотрим случай, когда одна из точек совпадает с O. Пусть, например, точка X совпадает с O. Тогда X_1 совпадает с O и X. По определению симметрии $OY = OY_1$, следовательно, $XY = X_1Y_1$. Теорема доказана.

Определение 59. Если при симметрии относительно некоторой точки O фигура F переходит сама в себя, то она называется *центрально-симметричной*. Точка O называется *центром симметрии*.

Пример. Параллелограмм является центрально-симметричной фигурой. Его центром симметрии является точка пересечения диагоналей.

Пусть $ABCD$ – параллелограмм, O – точка пересечения его диагоналей. Диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам. Значит, при симметрии

относительно точки O вершины переходят друг в друга следующий образом: $A \to C$, $B \to D$, $C \to A$, $D \to B$. Тогда сторона AB переходит в CD, сторона BC в DA, CD в AB, DA в BC. Таким образом, параллелограмм переходит в себя.

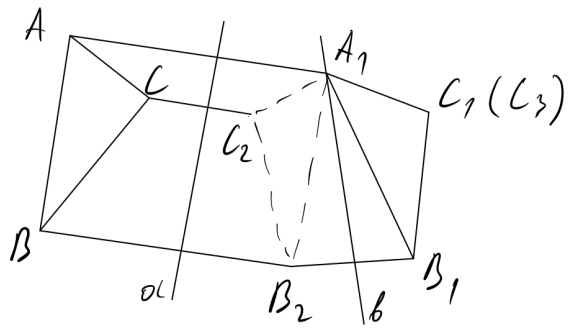
5. Равенство фигур

Определение 60. Фигуры F и F_1 называются *равными*, если они движением переводятся одна в другую.

Покажем, что равенство треугольников, определяемое через их совмещение движением, и равенство в смысле определения 20 выражают одно и то же.

Пусть треугольник ABC совмещается движением с треугольником $A_1B_1C_1$, например, так, что вершина A переходит в A_1, B – в B_1, C – в C_1. Так как при движении сохраняются расстояния и углы, то в наших треугольниках $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $BC = B_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$, то есть треугольники равны в смысле определения 20.

Пусть теперь у треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $BC = B_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$. Докажем, что они совмещаются движением. Если точки A и A_1 не совпадают, выполним преобразование симметрии относительно прямой a, перпендикулярной отрезку AA_1 и проходящей через его середину. Получим треугольник $A_1B_2C_2$. Если точка B_2 не совпала с B_1, то выполним симметрию относительно прямой b, соединяющей точку A_1 с серединой отрезка B_1B_2.



Получим треугольник $A_1B_1C_3$.

Если точки C_1 и C_3 лежат по одну сторону от прямой A_1B_1, то они совпадают. Действительно, так как углы $B_1A_1C_1$ и $B_1A_1C_3$ равны, то лучи A_1C_1 и A_1C_3 совпадают, а так как отрезки A_1C_1 и A_1C_3 равны, то совпадают точки C_1 и C_3.

Если точки C_1 и C_3 лежат по разные стороны прямой A_1B_1, то надо ещё применить симметрию относительно прямой A_1B_1. В этом случае так как угол $A_1B_1C_3$ равен углу $A_1B_1C_1$, то луч A_1C_3 перейдёт в луч A_1C_1, а так как $A_1C_3 = A_1C_1$, то точка C_3 перейдёт в C_1. Таким образом, треугольник ABC движением переведён в треугольник $A_1B_1C_1$.

Аналогично доказывается и эквивалентность равенства для отрезков.

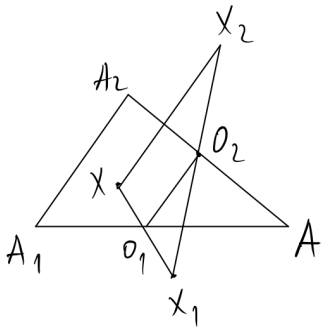
Покажем, что равенство углов по новому определению и по определению через градусную меру также эквивалентны. Выше уже доказывалось, что если один угол получен из другого движением, то эти два угла равны по определению 17. Теперь, пусть углы A и A_1 имеют равные градусные меры. Отложим на сторонах этих углов равные отрезки AB и A_1B_1, а на другой паре сторон равные отрезки AC и A_1C_1. Тогда треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по первому признаку и, как было только что доказано, совмещаются движением. Вместе с треугольниками совмещаются и углы A и A_1.

6. Параллельный перенос

Определение 61. *Параллельным переносом* называется такое движение, при котором точки смещаются по параллельным прямым на одно и то же расстояние.

Теорема 65. Каковы бы ни были точки A_1 и A_2, существует и притом единственный параллельный перенос, при котором точка A_1 переходит в A_2.

Доказательство. Отметим точку A, не лежащую на прямой A_1A_2 и обозначим O_1 и O_2 середины отрезков A_1A и A_2A. Пусть X – произвольная точка плоскости. Построим симметричную относительно O_1 точку X_1 и затем построим точку X_2 симметричную точке X_1 относительно точки O_2. Отображение плоскости на себя при котором точке X ставится в соответствие точка X_2 является движением, поскольку два движения, выполненные последовательно, снова дают движение. При этом движении точка A_1 переходит в A_2.



Если точка X не лежит на прямой O_1O_2, то O_1O_2 есть средняя линия треугольника X_1X_2X, поэтому прямые XX_2 и O_1O_2 параллельны, а отрезок XX_2 равен удвоенному отрезку O_1O_2 (т. 59).

Рассмотрим случай, когда точка X лежит на прямой O_1O_2. Введём на прямой O_1O_2 координаты, выбрав точку O_1 за начало координат, а луч O_1O_2 за положительную полупрямую. Тогда координата точки X_1, симметричной X относительно O_1, будет противоположна координате точки X, то есть $x_1 = -x$ (будем обозначать координаты точек прописными латинскими буквами). Координата точки O_2 равна длине отрезка O_1O_2 и поскольку точка O_2 является серединой отрезка X_1X_2, её координата равна $\frac{x_2 + x_1}{2}$ (т. 18). Получаем, что $\frac{x_2 + x_1}{2} = O_1O_2$. Значит,

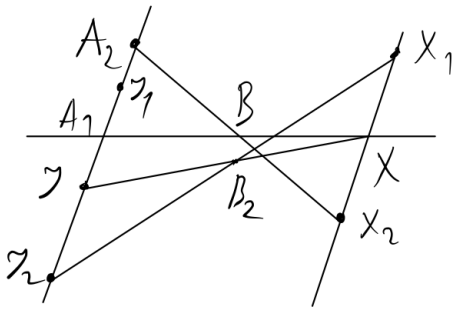
$$x_2+x_1 = 2O_1O_2;$$

$$x_2 = 2O_1O_2 - x_1 = 2O_1O_2 + x.$$

Тогда для длины отрезка XX_2 по теореме 17 получаем:

$$XX_2 = |x_2 - x| = 2O_1O_2.$$

Таким образом, при построенном движении точки плоскости смещаются по прямым, параллельным прямой O_1O_2 (либо по самой этой прямой), на расстояние равное $2O_1O_2$. Значит, данное движение есть параллельный перенос (опр. 61).



Докажем единственность параллельного переноса, переводящего точку A_1 в точку A_2. Пусть X – произвольная точка плоскости, не лежащая на прямой A_1A_2. Проведём через точку X прямую, параллельную A_1A_2 и отложим на ней отрезки XX_1 и XX_2, равные отрезку A_1A_2. Точки X_1 и X_2 различаются тем, что находятся по разные стороны от прямой A_1X. Пусть для определённости точка X_1 находится в одной полуплоскости с точкой A_2.

Точка X_2 не может соответствовать точке X при параллельном переносе, переводящем точку A_1 в A_2. Действительно, прямая A_1X при этом должна перейти в прямую A_2X_2. Точка B, в которой отрезок A_2X_2 пересекает прямую A_1X, должна перейти в точку B_1 также лежащую на прямой A_2X_2. В тоже время по свойству параллельного переноса прямая BB_1 параллельна прямой A_1A_2, но это невозможно так как прямая BB_1 совпадает с прямой A_2X_2, которая пересекается с A_1A_2 ⊗.

Пусть Y – произвольная точка на прямой A_1A_2. Отметим на прямой A_1A_2 точки Y_1 и Y_2, такие что $YY_1 = YY_2 = A_1A_2$. Эти точки отличаются тем, что лежат по разные стороны от прямой YX. Пусть для определённости точка Y_1 лежит в полуплоскости точки X_1.

Точка Y_2 не может соответствовать точке Y при рассматриваемом параллельном переносе. Действительно, прямая YX должна перейти в прямую Y_2X_1. Точка B_2, в которой отрезок Y_2X_1 пересекает прямую YX, должна перейти в точку B_3, также лежащую на прямой Y_2X_1. В тоже время по свойству параллельного переноса прямая B_2B_3 параллельна прямой XX_1, но это невозможно так как прямая B_2B_3 совпадает с прямой Y_2X_1, которая пересекает прямую XX_1 ⊗.

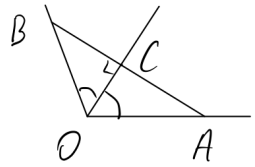
Таким образом, точке X (или Y) при рассматриваемом параллельном переносе может соответствовать только точка X_1 (Y_1). Однозначность в построении соответствующей точки и означает единственность данного параллельного переноса. Теорема доказана.

7. Поворот

Определение 62. *Поворотом* на угол φ относительно точки O называется такое движение, при котором точка O остаётся неподвижной, а каждый луч, исходящий из точки O, поворачивается на угол φ, то есть образует угол φ с соответствующим ему лучом.

Лемма 7. Прямая, содержащая биссектрису угла, является осью симметрии этого угла.

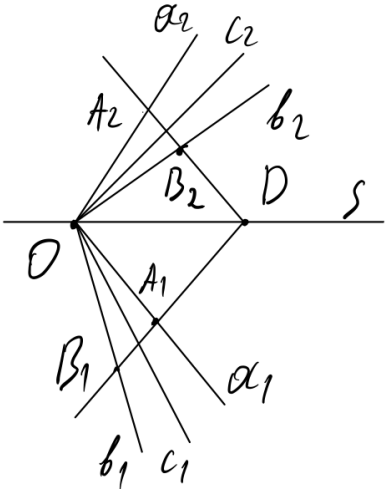
Доказательство. Если угол развёрнутый, то прямая, содержащая биссектрису угла, перпендикулярна прямой, которой принадлежат стороны угла. Поэтому при симметрии относительно прямой, содержащей биссектрису развёрнутого угла, по определению симметрии любая точка на одной из сторон угла перейдёт в некоторую точку на другой стороне угла. Таким образом, развёрнутый угол перейдёт в себя.



Пусть A – произвольная точка на стороне данного неразвёрнутого угла O. Отложим на другой стороне угла отрезок $OB = OA$. Тогда треугольник AOB равнобедренный. Биссектриса угла пересекает сторону AB треугольника AOB в некоторой точке C (т. 23), причём отрезок OC является высотой и медианой этого треугольника. Следовательно, точка A при симметрии относительно прямой OC переходит в точку B, лежащую на другой стороне угла (опр. 55). Значит, при симметрии относительно прямой, содержащей биссектрису угла, угол переходит в себя и эта прямая является осью симметрии угла (опр. 57). Лемма доказана.

Теорема 66. Если при движении только одна точка остаётся неподвижной, то это движение есть поворот.

Доказательство. Пусть O – неподвижная точка. Проведём из неё лучи a_1 и b_1, не принадлежащие одной прямой. При движении они перейдут в лучи a_2 и b_2. Углы (a_1b_1) и (a_2b_2) равны как соответствующие при движении. Проведём биссектрису c_1 угла (a_1b_1), биссектрису c_2 угла (a_2b_2) и биссектрису угла (c_1c_2). Последнюю дополним до прямой и обозначим эту прямую s.



Так как биссектрисы c_1 и c_2 симметричны относительно прямой s (лемма 7), а углы (a_1b_1) и (a_2b_2) равны, то эти углы тоже симметричны относительно прямой s. При симметрии относительно прямой s могут быть два варианта: либо соответствующими являются лучи a_1 и a_2, b_1 и b_2; либо лучи a_1 и b_2, b_1 и a_2. Докажем, что первый вариант невозможен.

Пусть A_1 – точка на луче a_1, а B_1 – точка на луче b_1. Обозначим D – точку пересечения прямой A_1B_1 с прямой s (если $A_1B_1 \parallel s$ надо обозначить B_1 любую другую точку луча b_1). Симметричная A_1B_1 относительно s прямая пересечёт лучи a_2 и b_2 в точках A_2 и B_2. В случае первого варианта при симметрии относительно

прямой s точка A_1 переходит в A_2, а точка B_1 в B_2. Так как точка O переходит при этом в себя, то $OA_1 = OA_2$, $OB_1 = OB_2$. Поэтому для первого варианта точки A_1 и A_2, B_1 и B_2 являются соответствующими при движении, о котором идёт речь в теореме.

Поскольку всякое движение сохраняет расстояния между точками и порядок расположения точек на прямой, в случае первого варианта любая точка X прямой A_1B_1 и при данном движении, и при симметрии относительно прямой s переходит в одну и ту же точку прямой A_2B_2. В частности точка D остаётся неподвижна. Но это невозможно, так как при данном движении неподвижна только точка O ⊗. Следовательно, первый вариант соответствия невозможен.

Остаётся второй вариант. В этом случае соответствующими при симметрии относительно прямой s являются лучи a_1 и b_2, b_1 и a_2. При этом углы (a_1a_2) и (b_1b_2) являются соответствующими по симметрии, а, следовательно, равными.

В случае, когда лучи a_1 и b_1 лежат на одной прямой, проведём из точки O ещё один луч e_1. По доказанному лучи a_1 и e_1 поворачиваются на один и тот же угол, и лучи b_1 и e_1 тоже поворачиваются на один и тот же угол, значит, и углы поворота лучей a_1 и b_1 равны. Теорема доказана.

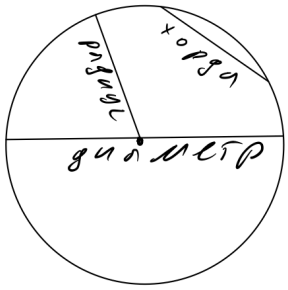
Из теоремы 66 следует, что *два зеркальных отражения, выполненные последовательно относительно двух пересекающихся прямых, дают поворот.*

Действительно, движение, которое получается в результате зеркальных отражений относительно двух пересекающихся прямых, оставляет неподвижной только одну точку – точку пересечения прямых. А по теореме 66 такое движение есть поворот.

§10. Окружность

1. Простейшие свойства окружности

Определение 63. *Окружностью* называется фигура, которая состоит из всех точек плоскости, равноудалённых от данной точки. Эта точка называется *центром окружности.*

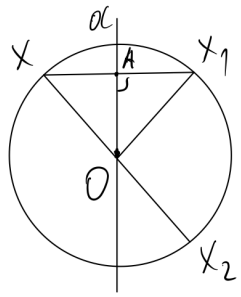


Определение 64. Расстояние от точек окружности до её центра называется *радиусом* окружности. Радиусом называется также любой отрезок, соединяющий точку окружности с её центром.

Определение 65. Отрезок, соединяющий две точки окружности, называется *хордой*. Хорда, содержащая центр окружности, называется *диаметром*.

Из определений 63-65 и аксиомы IV следует, что *диаметр равен двум радиусам*.

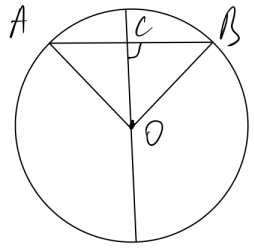
Теорема 67. Прямая, содержащая любой диаметр окружности, является осью симметрии окружности. Центр окружности является центром симметрии.
Доказательство. Пусть a – прямая, содержащая диаметр окружность и X – произвольная точка окружности. Построим точку X_1, симметричную точке X относительно прямой a. Если точка X принадлежит прямой a, то при симметрии она переходит в себя и, значит, остаётся на окружности. Если точка X не принадлежит прямой а, рассмотрим прямоугольные треугольники OAX и OAX_1. У них катет OA общий, а катеты AX и AX_1 равны по определению симметрии. Следовательно $\Delta OAX = \Delta OAX_1 \Rightarrow OX_1 = OX \Rightarrow$ точка X_1 лежит на окружности (опр. 63).



Значит, при симметрии относительно прямой, содержащей диаметр, окружность переходит в себя, то есть эта прямая является осью симметрии окружности.

Построим теперь точку X_2, симметричную точке X относительно центра окружности. По определению симметрии относительно точки $OX_2 = OX$, то есть точка X_2 лежит на окружности, следовательно, центр окружности является центром симметрии. Теорема доказана.

Теорема 68. Диаметр, перпендикулярный хорде, делит хорду пополам.
Доказательство. Пусть AB – данная хорда и C – её середина. Проведём диаметр через точку C. Треугольники OCA и OCB равны по третьему признаку равенства треугольников. У них стороны OA и OB равны как радиусы (опр. 63 и 64), сторона OC – общая, а $AC = CB$, потому что C – середина отрезка AB. Из равенства этих треугольников следует, что их углы при вершине C, будучи равными и смежными, прямые. Таким образом, диаметр, проходящий через точку C, перпендикулярен хорде AB и делит её пополам. Другого, перпендикулярного хорде AB, диаметра не существует, так как через точку O можно провести только одну прямую, перпендикулярную AB. Теорема доказана.

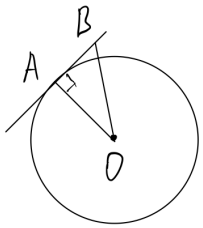


Теорема 69. Всякая хорда не больше диаметра. Она равна диаметру только тогда, когда сама является диаметром.
Доказательство. Если хорда AB не является диаметром, то в треугольнике AOB имеем $AB < AO + OB$ (т. 41). Так как AO и BO – радиусы, а диаметр равен двум радиусам, то AB меньше диаметра. Теорема доказана.

Определение 66. Прямая, проходящая через точку окружности, перпендикулярно к радиусу, проведённому в эту точку, называется *касательной*. При этом данная точка окружности называется *точкой касания*.

Из теоремы 31 следует, что *через любую точку окружности можно провести и притом только одну касательную.*

Говорят, что окружность *касается* отрезка *AB*, если точка касания окружности и прямой *AB* принадлежит отрезку *AB*.

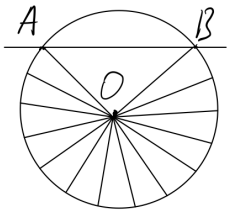


Теорема 70. Касательная имеет с окружностью только одну общую точку – точку касания.
Доказательство. Пусть *B* – любая точка касательной, отличная от точки касания *A*. По свойству перпендикуляра и наклонной *OB* > *OA*, то есть точка *B* отстоит от центра окружности на расстоянии, большем радиуса. Следовательно, точка *B* не принадлежит окружности. Теорема доказана.

2. Центральные углы

Определение 67. Пусть *A* и *B* – две точки окружности. Проведём через них прямую. Она разбивает плоскость на две полуплоскости. Части окружности, лежащие в этих полуплоскостях, мы будем называть *дугами окружности*. Если *AB* – диаметр, то дуги окружности называются *полуокружностями*.

Если хорда *AB* не является диаметром, то мы различаем дуги окружности следующим образом. Одна из полуплоскостей, на которые прямая *AB* разбивает плоскость, содержит центр окружности. Дугу, которая лежит в этой полуплоскости, будем называть дугой, *большей полуокружности*. Другую дугу будем называть дугой, *меньшей полуокружности*. Радиусы, проведённые в точки дуги, меньшей полуокружности, пересекают хорду *AB*, а радиусы, проведённые в точки дуги, большей полуокружности, не пересекают хорду *AB*.



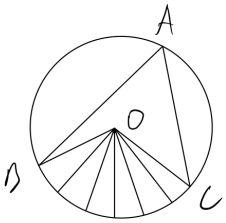
Определение 68. *Центральным углом*, отвечающим данной дуге окружности, мы будем называть фигуру, которая состоит из всех лучей, исходящих из центра окружности и пересекающих эту дугу.

На рисунке показаны лучи центрального угла большей полуокружности.

Для центральных углов определим *градусную меру* по следующему правилу. Если соответствующая дуга *AB* меньше полуокружности, то за меру центрального угла принимаем обычную меру угла, образованного полупрямыми *OA* и *OB*. Если дуга является полуокружностью, то есть *AB* диаметр, то угловую меру полагаем равной 180°. Наконец, если дуга больше полуокружности, то за угловую меру принимаем 360°– *α,* где *α* – градусная мера угла *AOB.*

3. Вписанные углы

Определение 69. Угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают эту окружность, называется *вписанным* в окружность.

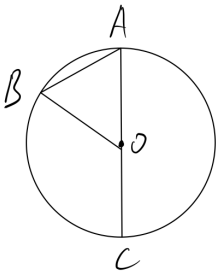


Определение 70. Пусть стороны вписанного угла с вершиной *A* пересекают окружность в точках *B* и *C*. Прямая *BC* разбивает окружность на две дуги. Центральный угол, соответствующей той из этих дуг, которая не содержит точку *A*, называется *центральным углом, соответствующим данному вписанному углу*.

На рисунке центральный угол, соответствующий вписанному углу, отмечен лучами, выходящими из точки *O*.

Теорема 71. Вписанный в окружность угол равен половине соответствующего центрального угла.

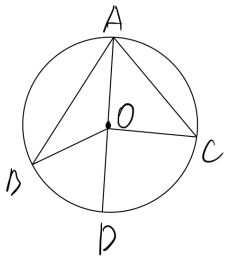
Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда одна из сторон вписанного угла *BAC* проходит через центр окружности. В этом случае луч *CA*, содержащий центр окружности, лежит в одной полуплоскости относительно прямой *BC* и поэтому центр окружности *O* лежит в одной полуплоскости с точкой *A.* Следовательно, центральный угол, соответствующий вписанному углу BAC, опирается на дугу BC, меньшую полуокружности (опр. 68 и 70). Его градусная мера равна градусной мере угла *BOC*. Угол *BOC* является внешним углом треугольника *BAO*, следовательно, $\angle BOC = \angle A + \angle B$ (т. 48).

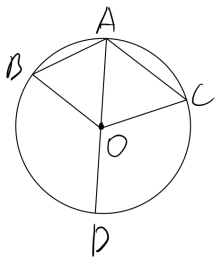


Но $\angle A = \angle B$ как углы при основании равнобедренного треугольника *AOB* $\Rightarrow \angle BOC = 2\angle A \Rightarrow \angle A = \frac{\angle BOC}{2}$, то есть угол *BAC* равен половине соответствующего центрального угла.

Пусть теперь ни одна из сторон вписанного угла *BAC* не проходит через центр окружности. Проведём диаметр *AD.* Для этого отложим на полупрямой дополнительной *OA* отрезок *OD* = *OA*. Будем различать два случая. 1) Стороны угла *A* разделяются лучом *AD*. 2) Стороны угла *A* не разделяются лучом *AD*.

Рассмотрим первый случай. По доказанному $\angle BAD = \frac{\angle BOD}{2}$; $\angle CAD = \frac{\angle COD}{2}$. Если центральный угол, соответствующий углу *A*, меньше либо равен 180°, то точки *A* и *O* лежат в одной полуплоскости относительно прямой *BC* (либо точка *O* лежит на прямой *BC*), значит, отрезок *BC* пересекает прямую *AD* в точке, лежащей на полупрямой *OD* или в самой точке *O*. То есть, луч *OD* проходит между сторонами



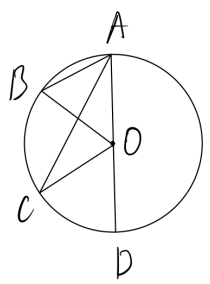


угла *BOC*. Тогда получаем, что $\angle BAC = \angle BAD + \angle CAD = \frac{1}{2}(\angle BOD + \angle COD) = \frac{1}{2}$ $\angle BOC$. Следовательно, угол *BAC* равен половине соответствующего центрального угла.

Если центральный угол, соответствующий вписанному углу *A*, больше 180°, то точки *A* и *O* лежат в разных полуплоскостях относительно прямой *BC*, следовательно, луч *OA* проходит между сторонами угла *BOC*. Тогда $\angle BOD = 180° - \angle AOB$; $\angle COD = 180° - \angle AOC \Rightarrow \angle BAC = \angle BAD + \angle CAD = \frac{1}{2}(\angle BOD + \angle COD) = \frac{1}{2}(360° - (\angle AOB + \angle AOC)) = \frac{1}{2}(360° - \angle BOC)$, то есть угол *BAC* равен половине соответствующего центрального угла.

Рассмотрим случай, когда луч *AD* не разделяет стороны угла *A*. Прежде всего докажем, что в этом случае центральный угол, соответствующий углу *BAC*, отвечает дуге меньшей полуокружности. Для этого, в соответствии с определениями 68 и 70, требуется доказать, что точки *A* и *O* лежат в одной полуплоскости относительно прямой *BC*. Допустим, что это не так (¬). Тогда отрезок *AO* пересекает прямую *BC* в некоторой точке *E*. Заметим, что точка *E* не может принадлежать отрезку *BC*, так как луч *AD* на разделяет стороны угла *BAC*. Пусть точка *B* лежит между точками *C* и *E*. Тогда полупрямые *BE* и *BC* дополнительные. Угол *OBC* является углом при основании равнобедренного треугольника *OBC*, следовательно, этот угол острый. Значит, смежный ему угол *OBE* – тупой. Поскольку точка *E* принадлежит отрезку *OA*, отрезок *OE* меньше *OA*, то есть *OE* меньше радиуса окружности. Тогда в треугольнике *OBE* угол *OEB* больше тупого угла *OBE*, что невозможно ⊗. Аналогично рассматривается случай, когда точка *C* лежит между точками *B* и *E*. Следовательно, точки *A* и *O* лежат в одной полуплоскости относительно прямой *BC* и градусная мера центрального угла, соответствующего углу *BAC,* равна градусной мере угла *BOC*.

Если луч *AD* не разделяет стороны угла *BAC*, то лучи *AB* и *AC* отложены в одну полуплоскость относительно прямой *AD*. Значит, либо луч *AB* проходит между



сторонами угла *CAD*, либо луч *AC* проходит между сторонами угла *BAD*. Пусть, например, луч *AC* проходит между лучами *AB* и *AD*. Тогда $\angle BAD = \angle BAC + \angle CAD \Rightarrow \angle BAC = \angle BAD - \angle CAD$. По доказанному $\angle BAD = \frac{\angle BOD}{2}$; $\angle CAD = \frac{\angle COD}{2} \Rightarrow \angle BAC = \frac{1}{2}\angle BOD - \frac{1}{2}\angle COD = \frac{1}{2}(\angle BOD - \angle COD)$. Так как $\angle BAC > 0$, то $\angle BOD > \angle COD \Rightarrow$ луч *OC* проходит между сторонами угла *BOD* $\Rightarrow \angle BOD = \angle BOC + \angle COD \Rightarrow \angle BOC =$

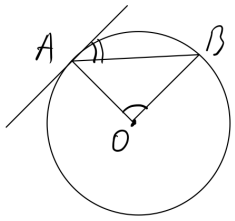
$\angle BOD - \angle COD \Rightarrow \angle BAC = \frac{1}{2}\angle BOC$, то есть угол *BAC* равен половине соответствующего центрального угла. Теорема доказана.

Из теоремы 71 следует, что *вписанные углы, стороны которых проходят через точки A и B окружности, а вершины лежат на одной из дуг, определяемых прямой AB, равны. В частности, углы, опирающиеся на полуокружность, прямые.*

Определение 71. Пусть *AB* – хорда окружности. Проведём касательную к окружности в точке *A*. Точка *A* разбивает касательную на две полупрямые – *полукасательные.* Угол между полукасательной и хордой *AB* (то есть лучом *AB*), и центральный угол, отвечающий той из дуг AB, которая лежит в одной полуплоскости с полукасательной относительно прямой *AB*, считаются соответствующими.

Лемма 8. Все точки окружности, кроме точки касания, лежат в полуплоскости центра окружности относительно касательной.
Доказательство. Допустим, что некоторая точка *B* окружности, отличная от точки касания *A*, и центр *O* лежат в разных полуплоскостях относительно касательной (¬). Тогда отрезок *OB* пересекает касательную в точке *E* и $OE < OB$, то есть *OE* меньше радиуса окружности. Но в тоже время $OE > OA$ по свойству перпендикуляра и наклонной ⊗. Значит, точки *B* и *O* лежат в одной полуплоскости относительно касательной. Лемма доказана.

Теорема 72. Угол между хордой и полукасательной в её концевой точке измеряется половиной соответствующего центрального угла.
Доказательство. Если хорда *AB* является диаметром, то углы между лучом *AB* и полукасательными равны 90°, а соответствующий центральный угол равен 180°.



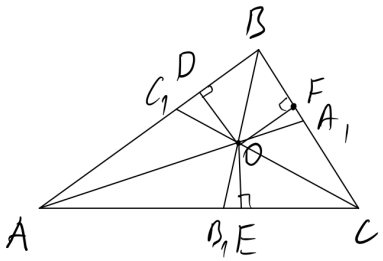
Пусть хорда *AB* не является диаметром. Тогда один из углов между полукасательной и хордой больше 90°, а другой меньше. Сначала рассмотрим случай, когда угол между полукасательной и хордой *AB* меньше 90°. Лучи *AB* и *AO* отложены в одну полуплоскость относительно касательной (лемма 8), поэтому луч *AB* проходит между полукасательной и лучом *AO* (т. 25) и, таким образом, разделяет точки полукасательной и центр окружности. Значит, соответствующий центральный угол опирается на дугу меньшую полуокружности. Угол между полукасательной и хордой равен $90° - \angle OAB = 90° - \frac{1}{2}(180° - \angle AOB) = 90° - 90° + \frac{1}{2}\angle AOB = \frac{1}{2}\angle AOB$ – то есть этот угол равен половине соответствующего центрального угла.

Другой угол между полукасательной и хордой является смежным с рассмотренным и поэтому равен $180° - \frac{1}{2}\angle AOB = \frac{1}{2}(360° - \angle AOB)$ – то есть тоже равен половине соответствующего центрального угла. Теорема доказана.

4. Вписанная окружность

Лемма 9. Все три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке, равноудалённой от сторон треугольника.

Доказательство. Пусть ABC – данный треугольник. Проведём биссектрисы AA_1 и BB_1. Докажем сначала, что эти биссектрисы пересекаются. Отрезок AC лежит в полуплоскости точки C относительно прямой AA_1 (т. 10). Значит, точки C и B_1 лежат в одной полуплоскости относительно прямой AA_1. Отрезок BC пересекается с прямой AA_1 в точке A_1 (опр. 6 и 7), следовательно, точки C и B лежат в разных полуплоскостях относительно прямой AA_1 (т. 8). Значит, точки B и B_1 лежат в разных полуплоскостях. Поэтому биссектриса BB_1 пересекается с прямой AA_1. Аналогично доказываем, что биссектриса AA_1 пересекается с прямой BB_1. Так как прямые AA_1 и BB_1 пересекаются только в одной точке (т. 2), то эта точка принадлежит и биссектрисе AA_1, и биссектрисе BB_1, то есть эти биссектрисы пересекаются в некоторой точке O. Аналогично доказывается, что биссектриса CC_1 пересекается с биссектрисой BB_1. Следовательно, точка пересечения любых двух биссектрис углов треугольника, принадлежит биссектрисам треугольника.



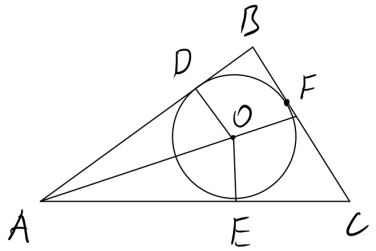
Опустим из точки O перпендикуляры OD, OE и OF на прямые AB, AC и BC. Докажем, что точки D, E и F лежат на сторонах треугольника ABC. Заметим, что точка D не может совпадать с точкой A (или B), поскольку в этом случае $OA \perp AB$ и, следовательно, угол BAC – развёрнутый. Но это невозможно так как точки B, A и C не лежат на одной прямой по определению треугольника. Допустим, что точка B лежит между точками D и A (¬). Тогда угол DBO является смежным с углом ABO. Угол ABO острый, как половина неразвёрнутого угла ABC. Значит, угол DBO тупой, что невозможно так как в прямоугольном треугольнике DBO не может быть тупого угла ⊗. Допустим, что точка A лежит между точками D и B (¬). Тогда угол DAO является смежным с углом BAO. Угол BAO острый, как половина неразвёрнутого угла BAC. Значит, угол DAO тупой, что невозможно так как в прямоугольном треугольнике DAO не может быть тупого угла ⊗. Поскольку одна из трёх точек A, D, B должна лежать между двумя другими, получаем, что точка D лежит между точками A и B. Аналогично доказывается, что точка E лежит между A и C, и точка F лежит между B и C.

Прямоугольные треугольники *AOD* и *AOE* равны. У них гипотенуза *AO* общая, а углы *OAD* и *OAE* равны потому что *AO* – биссектриса. Следовательно, *OD* = *OE*. Аналогично доказывается, что *OD* = *OF*. Следовательно, точка *O* – равноудалена от сторон треугольника *ABC*.

Проведём луч *CO*. Из равенства прямоугольных треугольников *COE* и *COF* следует, что $\angle ECO = \angle FCO$. Так как луч *CO* пересекает отрезок BB_1, он проходит между сторонами угла *ACB*. Значит, *CO* – биссектриса угла *ACB* треугольника *ABC*. Поскольку у угла *ACB* не может быть другой биссектрисы, получаем, что все три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке *O*. Лемма доказана.

Определение 72. Окружность называется *вписанной* в треугольник, если она касается всех его сторон.

Теорема 73. Центр окружности, вписанной в треугольник, является точкой пересечения его биссектрис.
Доказательство. Пусть *ABC* – данный треугольник, *O* – центр вписанной в него окружности, *D, E* и *F* – точки касания окружности со сторонами треугольника. Прямоугольные треугольники *AOD* и *AOE* равны по гипотенузе и катету. У них гипотенуза *AO* общая, а катеты *OD* и *OE* равны как радиусы окружности. Из равенства треугольников следует равенство углов *OAD* и *OAE*.



Докажем теперь, что луч *AO* проходит между сторонами угла *BAC*. Обозначим AO_1 полупрямую дополнительную *AO*. *OAD* и *OAE* – равные острые углы в прямоугольных треугольниках *AOD* и *AOE*, значит, смежные им тупые углы O_1AB и O_1AC тоже равны.

По аксиоме VIII в полуплоскость точки *B* от полупрямой *AO* можно отложить только один угол, равный углу *OAB*, следовательно, угол *OAC* (совпадающий с углом *OAE*) отложен в другую полуплоскость. Значит, точки *B* и *C* лежат по разные стороны от прямой *AO*, поэтому отрезок *BC* пересекает прямую *AO*. Допустим, что точка пересечения отрезка *BC* и прямой *AO* лежит на полупрямой AO_1 (¬). Тогда полупрямая AO_1 проходит между сторонами угла *BAC* и является биссектрисой этого угла. Следовательно, угол *BAC* равен сумме двух тупых углов O_1AB и O_1AC, что противоречит теореме 21 ⊗. Точка *A* не может быть точкой пересечения отрезка *BC* и прямой *AO*, так как точки *B, A* и *C* не лежат на одной прямой по определению треугольника. Значит, точка пересечения отрезка *BC* и прямой *AO* лежит на полупрямой *AO*, то есть полупрямая *AO* проходит между сторонами угла *BAC* и является его биссектрисой (опр. 18).

Точно также доказывается, что точка *O* лежит на двух других биссектрисах углов треугольника. Значит, *O* – точка пересечения биссектрис треугольника (лемма 9). Теорема доказана.

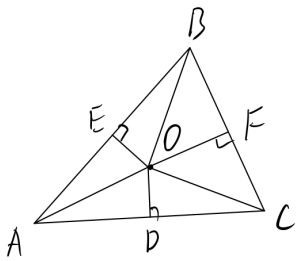
Теорема 74. В любой треугольник можно вписать и притом только одну окружность.
Доказательство. Пусть *ABC* – данный треугольник. Его биссектрисы пересекаются в некоторой точке *O,* из которой можно опустить равные перпендикуляры *OD, OE* и *OF* к сторонами *AB, AC* и *BC* треугольника *ABC* (лемма 9). Следовательно, окружность, с центром *O* и радиусом *OD* касается сторон треугольника в точках *D*, *E* и *F*, то есть является вписанной (опр. 72).

Единственность вписанной окружности следует из леммы 9 и теорем 73 и 44, однозначно определяющих её центр и радиус. Теорема доказана.

5. Описанная окружность

Определение 73. Прямая, перпендикулярная прямой *AB* и проходящая через середину отрезка *AB*, называется *серединным перпендикуляром*.

Лемма 10. Серединные перпендикуляры сторон треугольника пересекаются в одной точке, равноудалённой от вершин треугольника.
Доказательство. Пусть *ABC* – данный треугольник. Проведём через середины *E* и *D* сторон *AB* и *AC* треугольника прямые, перпендикулярные прямым *AB* и *AC*. Эти прямые пересекутся в некоторой точке *O*. Действительно, в противном случае они были бы параллельны. Но тогда прямые *AB* и *AC*, как перпендикулярные к параллельным, были бы тоже параллельными, а они пересекаются (в точке *A*).



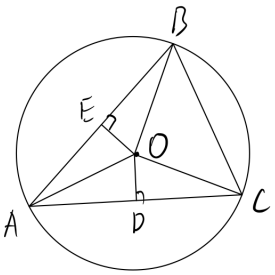
Из равенства прямоугольных треугольников *AOD* и *COD* следует, что *OA* = *OC*. Из равенства прямоугольных треугольников *AOE* и *BOE* следует, что *OA* = *OB*. Следовательно, точка *O* равноудалена от вершин треугольника *ABC*.

Опустим из точки *O* перпендикуляр *OF* на прямую *BC*. Из равенства прямоугольных треугольников *BOF* и *COF* следует, что *BF* = *CF*. Значит, *F* – середина отрезка *BC* (следствие из т. 6) и прямая *OF* является серединным перпендикуляром стороны *BC* (опр. 73). Так как через точку *F* нельзя провести другую прямую, перпендикулярную *BC*, получаем, что все три серединных перпендикуляра треугольника *ABC* пересекаются в точке *O*. Лемма доказана.

Определение 74. Окружность называется *описанной* около треугольника, если она проходит через все его вершины.

Теорема 75. Центр окружности, описанной около треугольника, является точкой пересечения серединных перпендикуляров сторон треугольника.

Доказательство. Пусть *ABC* – данный треугольник и *O* – центр описанной около него окружности. Треугольник *AOC* равнобедренный; у него стороны *OA* и *OC* равны как радиусы. Медиана *OD* этого треугольника так же является его высотой. Поэтому центр окружности лежит на прямой, перпендикулярной стороне *AC* и проходящей через её середину. Точно так же доказывается, что центр окружности лежит на серединных перпендикулярах двух других сторон треугольника. Теорема доказана.



Теорема 76. Около любого треугольника можно описать и притом только одну окружность.

Доказательство. Пусть *ABC* – данный треугольник. Серединные перпендикуляры его сторон пересекаются в некоторой точке *O*, равноудалённой от вершин треугольника *ABC* (лемма 10). Значит, окружность с центром в точке *O* и радиусом *OA* является описанной около треугольника *ABC* (опр. 74).

Единственность описанной окружности следует из леммы 10, теоремы 75 и определения 74, однозначно определяющих центр и радиус описанной окружности. Теорема доказана.

§11. Подобие треугольников

1. Основной признак подобия треугольников

Определение 75. Треугольники (не обязательно различные) называются *подобными,* если три угла одного треугольника соответственно равны трём углам другого, и при этом отношения сторон, лежащих против равных углов, равны.

Например, если для треугольников *ABC* и *DEF* выполняются равенства $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$, $\angle C = \angle F$, и $\frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF} = \frac{AB}{DE}$, то треугольники *ABC* и *DEF* подобны.

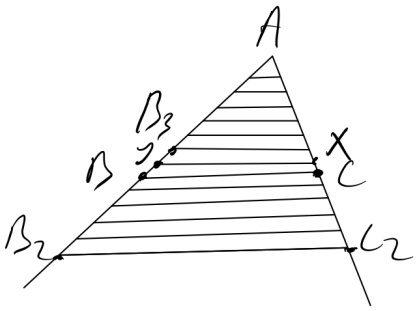
Обозначение $\Delta ABC \sim \Delta DEF$.

Теорема 77. Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого треугольника, то такие треугольники подобны.

Доказательство. Пусть у треугольников *ABC* и $A_1B_1C_1$ $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$. Так как сумма углов треугольника равна 180°, то из равенства углов $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, следует равенство $\angle C = \angle C_1$. Докажем пропорциональность сторон треугольников *ABC* и $A_1B_1C_1$.

Если $AB = A_1B_1$, то треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по второму признаку и отношения их соответствующих сторон равны 1. Следовательно $\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$.

Пусть $AB \neq A_1B_1$. Отложим на полупрямой AB отрезок AB_2, равный A_1B_1. Для определённости будем считать, что $AB < A_1B_1$, тогда точка B лежит между точками A и B_2. Проведём через точку B_2 прямую, параллельную BC. Она пересечёт прямую AC в некоторой точке C_2, причём C_2 будет лежать на полупрямой AC. Действительно, так как $B_2C_2 \parallel BC$ точки B_2 и C_2 лежат в одной полуплоскости относительно BC (т. 29). Точки B_2 и A лежат в разных полуплоскостях относительно BC, значит, и точки C_2 и A лежат в разных полуплоскостях, так что отрезок AC_2 пересекается с прямой BC. Единственная точка в которой прямые AC_2 и BC пересекаются это точка C, значит, точка C лежит между точками A и C_2. Следовательно, точки C и C_2 лежат по одну сторону от A, и C_2 принадлежит полупрямой AC.

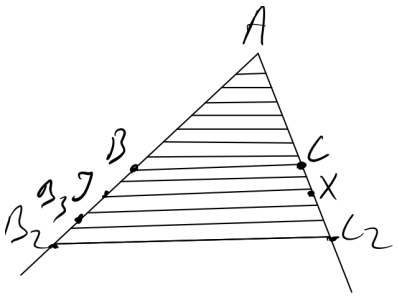


По свойству углов при параллельных прямых BC и B_2C_2 и секущей BB_2 $\angle AB_2C_2 = \angle ABC = \angle A_1B_1C_1$. Рассмотрим треугольники AB_2C_2 и $A_1B_1C_1$. У них $\angle B_2AC_2 = \angle B_1A_1C_1$ по условию теоремы, $AB_2 = A_1B_1$ и $\angle AB_2C_2 = \angle A_1B_1C_1$ по построению $\Rightarrow$ $\Delta AB_2C_2 = \Delta A_1B_1C_1 \Rightarrow AC_2 = A_1C_1$.

Теперь требуется доказать, что $\frac{AB}{AB_2} = \frac{AC}{AC_2}$. Перепишем это отношение в виде $\frac{AB}{AC} = \frac{AB_2}{AC_2}$. Допустим, что $\frac{AB}{AC} \neq \frac{AB_2}{AC_2}$ (¬). Рассмотрим случай $\frac{AB}{AC} > \frac{AB_2}{AC_2}$. Возьмём на отрезке AB точку B_3 так, чтобы $\frac{AB_3}{AC} = \frac{AB_2}{AC_2}$. Разобьём отрезок AB_2 на большое число n равных частей, таких что $\frac{AB_2}{n} < BB_3$ и проведём через точки деления прямые, параллельные прямой BC. По теореме 58 (см. замечание после этой теоремы) эти прямые пересекут полупрямую AC и разобьют отрезок AC_2 на n равных отрезков.

Обозначим $a = \frac{AB_2}{n}$ – длину отрезка разбиения. Пусть k – целое от деления AB_3 на a. Тогда так как $a < BB_3$, то $AB_3 < a(k+1) < AB$. Обозначим Y такую точку разбиения, что $AY = a(k+1)$. Обозначим X точку, соответствующую точке Y на стороне AC. Из сравнения длин отрезков AY, AB_3 и AB получаем, что точка B_3 лежит между точками A и Y, а точка Y лежит между точками A и B. Тогда по лемме 6 точка X лежит между точками A и C.

Пусть $b = \frac{AC_2}{n}$. Имеем: $AB_2 = na$, $AC_2 = nb$, $AY = (k+1)a$, $AX = (k+1)b$. Мы видим, что $\frac{AB_2}{AC_2} = \frac{AY}{AX}$. Заменим в правой части равенства величину AY меньшей величиной AB_3, а величину AX – большей AC. Тогда правая часть уменьшится и мы получим $\frac{AB_2}{AC_2} > \frac{AB_3}{AC}$. Но по выбору точки B_3 должно быть $\frac{AB_3}{AC} = \frac{AB_2}{AC_2}$ ⊗.



Теперь рассмотрим случай $\frac{AB}{AC} < \frac{AB_2}{AC_2}$. Возьмём на полупрямой AB точку B_3 так, чтобы $\frac{AB_3}{AC} = \frac{AB_2}{AC_2}$. Заметим, что в этом случае $AB_3 > AB$, но $AB_3 < AB_2$, поскольку $AC_2 > AC$. Значит, точка B лежит между A и B_3, а точка B_3 между A и B_2. Построим разбиение аналогично предыдущему случаю и обозначим k – целое от деления AB на a. Тогда $AB < a(k+1) < AB_3$. Значит, если $AY = a(k+1)$, то точка Y лежит между точками A и B_3, а точка B между A и Y. Точка C при этом будет лежать между A и X.

Аналогично предыдущему случаю получаем, что $\frac{AB_2}{AC_2} = \frac{AY}{AX}$. Заменим в правой части равенства величину AY большей величиной AB_3, а величину AX – меньшей AC. Тогда правая часть увеличится, и мы получим $\frac{AB_2}{AC_2} < \frac{AB_3}{AC}$. Но по выбору точки B_3 должно быть $\frac{AB_3}{AC} = \frac{AB_2}{AC_2}$ ⊗. Значит, $\frac{AB}{AC} = \frac{AB_2}{AC_2}$ или $\frac{AB}{AB_2} = \frac{AC}{AC_2}$. Вспоминая, что $AB_2 = A_1B_1$, а $AC_2 = A_1C_1$, получаем $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$. Аналогично доказывается, что $\frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BC}{B_1C_1}$. Теорема доказана.

2. Другие признаки подобия треугольников

Теорема 78. Если у треугольников ABC и $A_1B_1C_1$

$$\angle A = \angle A_1 \text{ и } \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1},$$

то треугольники подобны.

Доказательство. Отложим на полупрямой AB отрезок $AB_2 = A_1B_1$ и проведём через точку B_2 прямую, параллельную BC. Эта прямая пересечёт прямую AC в точке C_2, причём, если точка B лежит между A и B_2, то C лежит между A и C_2, а если B_2 лежит между A и B, то C_2 лежит между A и C. В любом случае точка C_2 лежит на

полупрямой AC. Получаем, что в треугольнике AB_2C_2 $AB_2 = A_1B_1$, $\angle B_2AC_2 = \angle A$, $\angle B_2 = \angle B$.

По теореме 77 $\Delta ABC \sim \Delta AB_2C_2 \Rightarrow \frac{AB}{AB_2} = \frac{AC}{AC_2}$ (опр. 75). Но $AB_2 = A_1B_1 \Rightarrow$

$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{AC_2}$ и, так как $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$ (по условию), то $A_1C_1 = AC_2$. Тогда в треугольниках $A_1B_1C_1$ и AB_2C_2 $A_1B_1 = AB_2$ по построению, $A_1C_1 = AC_2$ по доказанному, $\angle A_1 = \angle A = \angle B_2AC_2 \Rightarrow \Delta A_1B_1C_1 = \Delta AB_2C_2$ и так как $\Delta ABC \sim \Delta AB_2C_2$, то

$\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$. Теорема доказана.

Теорема 79. Если у треугольников ABC и $A_1B_1C_1$

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BC}{B_1C_1},$$

то треугольники подобны.

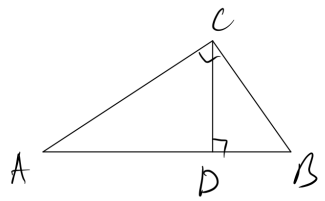
Доказательство. Построим треугольник $\Delta A_2B_2C_2$ у которого $A_2B_2 = A_1B_1$, $A_2C_2 = A_1C_1$, $\angle A_2 = \angle A$. По теореме 78 $\Delta ABC \sim \Delta A_2B_2C_2 \Rightarrow \frac{AC}{A_2C_2} = \frac{BC}{B_2C_2}$, учитывая, что $A_2C_2 = A_1C_1$, получаем $\frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BC}{B_2C_2}$ и так как по условию $\frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BC}{B_1C_1}$, то $B_2C_2 = B_1C_1$. Тогда $\Delta A_2B_2C_2 = \Delta A_1B_1C_1$ по третьему признаку и так как $\Delta ABC \sim \Delta A_2B_2C_2$, то ΔABC

$\sim \Delta A_1B_1C_1$. Теорема доказана.

3. Пропорциональные отрезки в треугольнике

Лемма 11. Основание высоты прямоугольного треугольника, проведённой из вершины прямого угла, лежит на гипотенузе.

Доказательство. Пусть CD – высота, проведённая из вершины прямого угла C прямоугольного треугольника ABC. Точка D не может совпадать с A или B, поскольку в этом случае в треугольнике ABC будет два прямых угла. Допустим, точка B лежит между A и D. Тогда углы ABC и DBC в прямоугольных треугольниках ABC и DBC смежные и оба острые, что невозможно. Таким же образом заключаем, что и точка A не может лежать между B и D.



Следовательно, точка D лежит между A и B, то есть принадлежит гипотенузе AB. Лемма доказана.

Средним геометрическим чисел a и b называется число $\sqrt{ab}$.

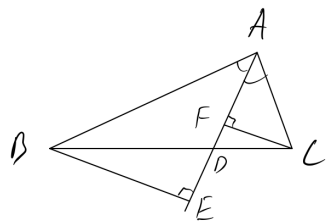
Теорема 80. Высота прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла, есть среднее геометрическое между проекциями катетов на гипотенузу. Каждый катет есть среднее геометрическое между гипотенузой и проекцией этого катета на гипотенузу.

Доказательство. 1) Пусть *ABC* – данный прямоугольный треугольник с прямым углом *C*. Основание *D* высоты *CD* лежит на гипотенузе *AB* (лемма 11). Так как каждый из углов *CAD* и *BCD* дополняет угол *ABC* до 90°, то $\angle CAD = \angle BCD \Rightarrow \Delta CAD \sim \Delta BCD$ (т. 77) $\Rightarrow \frac{CD}{BD} = \frac{AD}{CD}$ (опр. 75) $\Rightarrow CD^2 = AD \cdot BD \Rightarrow CD = \sqrt{AD \cdot BD}$.

2) Аналогично получаем, что $\Delta BCD \sim \Delta BAC \Rightarrow \frac{AB}{CB} = \frac{CB}{BD} \Rightarrow CB^2 = AB \cdot BD \Rightarrow$ $CB = \sqrt{AB \cdot BD}$. Теорема доказана.

Теорема 81. Биссектриса *AD* треугольника *ABC* делит сторону *BC* на отрезки, пропорциональные сторонам *AB* и *AC*, то есть $\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{CD}$.

Доказательство. Если треугольник *ABC* равнобедренный с основанием *BC*, то биссектриса *AD* является медианой, следовательно, *BD* = *CD*. Так как *AB* = *AC*, то $\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{CD}$.



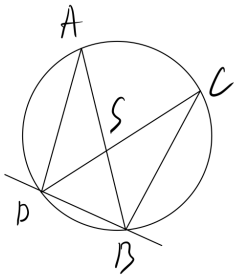
Пусть AB ≠ AC. Опустим перпендикуляры *CF* и *BE* на полупрямую *AD* (точки *F* и *E* не могут попасть на полупрямую, дополнительную *AD,* так как в этом случае углы *BAE* и *CAF* в прямоугольных треугольниках окажутся тупыми) и докажем, что точки *E* и *F* разделяются точкой *D*. Допустим, что точки *E* и *F* лежат по одну сторону от *D* (¬). Тогда углы *BDE* и *CDF* в прямоугольных треугольниках *BDE* и *CDF* смежные и оба острые, что невозможно ⊗. Следовательно, точки *F* и *E* лежат по разные стороны от точки *D*. Тогда углы *FDC* и *BDE* равны как вертикальные. Значит, $\Delta BED \sim \Delta CFD$ $\Rightarrow \frac{BE}{CF} = \frac{BD}{CD}$.

В треугольниках *BAE* и *CAF* углы *E* и *F* прямые, а углы при вершине *A* равны так как *AD* – биссектриса $\Rightarrow \Delta BAE \sim \Delta CAF \Rightarrow \frac{BE}{CF} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{AB}{BD} = \frac{AC}{CD}$. Теорема доказана.

4. Пропорциональность отрезков хорд и секущих

Теорема 82. Произведения отрезков пересекающихся хорд равны. Именно, если хорды *AB* и *CD* пересекаются в точке *S*, то $AS \cdot BS = CS \cdot DS$.

Доказательство. Проведём прямую *BD*. Точки *A* и *C* лежат в одной полуплоскости относительно *BD*, именно в полуплоскости точки *S*. Отсюда следует, что обе точки *A* и *C* принадлежат одной из дуг, на которые прямая *BD* делит окружность. А это значит, что вписанные углы *DCB* и *DAB* равны. Так как углы *ASD* и *CSB* равны как вертикальные, получаем, что $\Delta ASD \sim \Delta CSB \Rightarrow$

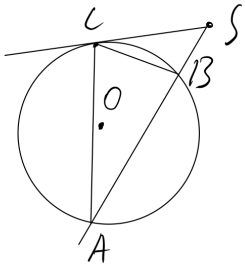


$\frac{DS}{BS} = \frac{AS}{CS} \Rightarrow AS \cdot BS = CS \cdot DS$. Теорема доказана.

Определение 76. Если прямая *a*, не являющаяся касательной окружности, имеет с окружностью общую точку *A*, то говорят, что прямая a *пересекает* окружность в точке *A*. Точка *A* называется *точкой пересечения* прямой *a* и окружности, а прямая *a* называется *секущей* окружности.

Теорема 83. Если через точку *S* проведена секущая окружности и касательная, причём *A* и *B* – точки пересечения окружности с секущей, а *C* – точка касания с касательной, то $AS \cdot BS = CS^2$. Короче говоря, произведение отрезков секущей равно квадрату касательной.

Доказательство. Докажем, что точки *A* и *B* не разделяются точкой *S*. Допустим, что точка *S* лежит между точками *A* и *B* (¬). Проведём луч *SO* (*O* – центр окружности). Углы *OSA* и *OSB* смежные, значит, один из них не меньше 90°. Пусть, например, угол *OSA* не меньше 90°. Тогда в треугольнике *OSA* сторона *OA* – наибольшая и, значит, *OS* меньше радиуса окружности. Однако *OS* > *OC* по свойству перпендикуляра и наклонной к прямой *SC* ⊗. Получаем, что точка *S* не может лежать между точками *A* и *B*. Пусть для определённости точка *B* лежит между точками *A* и *S*. Тогда точки *A* и *S* лежат в разных полуплоскостях относительно прямой *BC*, следовательно, точка *A* не лежит на дуге, находящейся в полуплоскости полукасательной *SC.* Поэтому центральный угол, соответствующий углу *SCB* совпадает с центральным углом, соответствующим углу *CAB* (опр. 70 и 71).



Треугольники *SAC* и *SCB* подобны. У них угол *S* общий, а углы *CAB* и *BCS* равны, так как измеряются половиной одного и того же центрального угла (т. 71 и 72). Из подобия треугольников следует пропорция $\frac{CS}{AS} = \frac{SB}{SC}$. Отсюда $AS \cdot BS = CS^2$.

Теорема доказана.

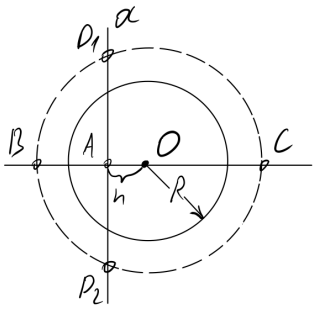
Из теоремы 83 следует, что *произведения отрезков секущих, проведённых из одной точки, равны.*

5. Пересечение прямой с окружностью

Теорема 84. Пусть даны окружность радиуса R с центром O и прямая a, которая проходит на расстоянии h от центра окружности. Тогда прямая не пересекает окружность, если $h > R$; прямая касается окружности, если $h = R$; прямая пересекает окружность в двух точках, если $h < R$.

Доказательство. Если $h > R$, то каждая точка прямой находится на расстоянии, большем R от центра окружности. Следовательно, такая точка не может принадлежать окружности, то есть прямая и окружность не пересекаются.

Если $h = R$, то основание перпендикуляра, опущенного из центра окружности на прямую, лежит на окружности. В этой точке прямая касается окружности по определению касательной.



Рассмотрим случай $h < R$. Проведём прямую OA, перпендикулярную прямой a. Отложим от точки A на прямой a отрезки AD_1 и AD_2, равные $\sqrt{R^2 - h^2}$. Тогда из равенства треугольников OAD_1 и OAD_2 получаем, что $OD_1 = OD_2$. Проведём окружность из центра O радиусом $OD_1 = OD_2$. Эта окружность пересекает прямую a в точках D_1 и D_2.

Вычислим радиус построенной окружности. Обозначим его через x. Отложим на полупрямой OA отрезок $OB = x$, а на полупрямой дополнительной OA отрезок $OC = x$. Точки B и C принадлежат окружности с радиусом x. Поскольку в прямоугольном треугольнике OAD_1 $OA < OD_1$ заключаем, что $OA < x$, значит, точка A лежит между точками O и B. Тогда так как $OA = h$, то $AB = x - h$, $AC = x + h$.

По теореме 82 $AB \cdot AC = AD_1 \cdot AD_2$. Поскольку $AD_1 \cdot AD_2 = R^2 - h^2$ и $AB \cdot AC = (x - h)(x + h)$, получаем равенство $x^2 - h^2 = R^2 - h^2$, то есть $x = R$.
Таким образом, построенная окружность совпадает с данной, и, следовательно, данная окружность пересекает прямую a в двух точках, D_1 и D_2.

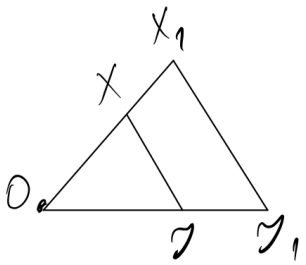
Прямая a не может иметь других точек пересечения с окружностью, кроме D_1 и D_2. Действительно, если бы такая точка была, обозначим её P_1, то симметричная ей точка P_2 относительно диаметра BC тоже была бы на окружности (т. 67). По теореме 82 $AP_1 \cdot AP_2 = AB \cdot AC = AD_1 \cdot AD_2$. Так как $AD_1 = AD_2$, $AP_1 = AP_2$, то $AP_1 = AD_1$. А это значит, что точка P_1 совпадает либо с D_1, либо с D_2. Теорема доказана.

6. Гомотетия. Подобие фигур

Определение 77. *Преобразованием подобия* называется взаимно однозначное отображение плоскости на себя, при котором для любых двух точек X, Y и соответствующих им точек X_1, Y_1 выполняется соотношение $X_1Y_1 = k \cdot XY$, причём число k не зависит от выбора точек X и Y. Число k называется *коэффициентом подобия.*

Определение 78. Пусть O – произвольная точка плоскости. Поставим в соответствие каждой точке X плоскости точку X_1 по следующему правилу. Если точка X совпадает с O, то X_1 есть точка O. Если X отлична от O, то X_1 лежит на полупрямой OX на расстоянии $k \cdot OX$ от точки O, то есть $OX_1 = k \cdot OX$, где k – положительное число. Преобразование плоскости, при котором точке X сопоставляется таким образом точка X_1, называется *гомотетией*. Точка O называется *центром гомотетии*, а число k – *коэффициентом гомотетии*.

Теорема 85. Гомотетия есть преобразование подобия.
Доказательство. Пусть X и Y – две произвольные точки плоскости, не лежащие на одной прямой с точкой O. Треугольники OXY и OX_1Y_1 подобны, так как у них угол O общий, а $\frac{OX_1}{OX} = \frac{OY_1}{OY} = k$ (опр. 78). Из подобия треугольников следует, что отношение $\frac{X_1Y_1}{XY}$ равно k, откуда $X_1Y_1 = k \cdot XY$.



Рассмотрим случай, когда точки O, X, Y лежат на одной прямой. Введём на этой прямой координаты, выбрав точку O за начало координат. Обозначим x и y координаты точек X, Y, а x_1 и y_1 – координаты точек X_1, Y_1. Тогда по определению гомотетии $x_1 = kx$ и $y_1 = ky$. Получаем, что $X_1Y_1 = |y_1 - x_1| = |ky - kx| = k \cdot |y - x| = k \cdot XY$.

Наконец, если одна из исходных точек совпадает с точкой O, то по определению гомотетии имеем: $OY_1 = k \cdot OY$. Значит, гомотетия есть преобразование подобия (опр. 77). Теорема доказана.

Теорема 86. При преобразовании подобия точки, лежащие на прямой, переходят в точки, лежащие на прямой, и сохраняется порядок их взаимного расположения.
Доказательство. Пусть точки $A, B, C,$ лежащие на прямой, переходят в точки A_1, B_1, C_1. Докажем, что тогда точки A_1, B_1, C_1 тоже лежат на одной прямой, и если точка B лежит между точками A и C, то точка B_1 лежит между точками A_1 и C_1.

Пусть точка B лежит между точками A и C. Тогда по определению подобия $A_1C_1 = k \cdot AC = k(AB + BC) = k \cdot AB + k \cdot BC = A_1B_1 + B_1C_1$. То есть,

$$A_1C_1 = A_1B_1 + B_1C_1.$$

Значит, точки A_1, B_1, C_1 лежат на одной прямой и если точка B лежит между A и C, то точка точка B_1 лежит между A_1 и C_1 (следствие из т. 41). Теорема доказана.

Пусть задано некоторое преобразование плоскости. Тогда, если F – произвольная фигура на плоскости, точки, соответствующие при преобразовании точкам фигуры

F, образуют некоторую фигуру F_1. Будем говорить, что преобразование *переводит* фигуру F в фигуру F_1.

Из теоремы 86 следует, что *преобразование подобия переводит прямые в прямые, полупрямые – в полупрямые, отрезки – в отрезки*.

Докажем, что *преобразование подобия сохраняет углы между полупрямыми*. Действительно, пусть неразвёрнутый угол ABC преобразованием подобия переводится в угол $A_1B_1C_1$. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны по теореме 72, следовательно, $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$.

Определение 79. Две фигуры F и F_1 называются *подобными*, если они переводятся друг в друга преобразованием подобия.

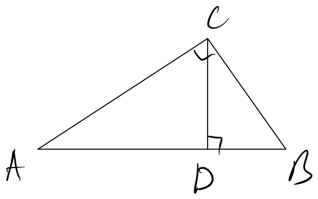
Из свойств преобразования подобия следует, что *у подобных фигур соответствующие углы равны, а соответствующие отрезки пропорциональны*.

Покажем, что подобие треугольников, определяемое через преобразование подобия, и подобие по определению 75, эквивалентны. То есть, если треугольники подобны по определению 75, то они подобны и по определению 79, как и наоборот. Если треугольник ABC преобразованием подобия переводится в треугольник $A_1B_1C_1$, то по теореме 72 эти треугольники подобны в смысле определения 75. Пусть $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$ по определению 75. Отложим на полупрямых AB и AC отрезки AB_2 и AC_2, равные отрезкам A_1B_1 и A_1C_1 соответственно. Треугольник AB_2C_2 равен треугольнику $A_1B_1C_1$ по первому признаку. Проведём преобразование плоскости при котором сначала треугольник $A_1B_1C_1$ движением переводится в треугольник AB_2C_2, а затем треугольник AB_2C_2 гомотетией с центром A и коэффициентом $k = \frac{AB}{AB_2}$ переводится в треугольник ABC. Так как при движении расстояния между точками сохраняются, а при гомотетии все расстояния изменяются в k раз, то в результате указанного преобразования плоскости расстояния между соответствующими точками тоже изменяются в k раз. Следовательно, данное преобразование является преобразованием подобия, переводящим треугольник $A_1B_1C_1$ в треугольник ABC. То есть эти треугольники подобны по определению 79.

§12. Теорема Пифагора и её применения

1. Теорема Пифагора

Теорема 87 (Пифагора). В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.



Доказательство. Пусть ABC – данный прямоугольный треугольник с прямым углом C. Проведём высоту CD. По теореме 80 $AC^2 = AD \cdot AB$, $BC^2 = BD \cdot AB$. Складывая эти равенства почленно, получим

$$AC^2 + BC^2 = AB \cdot (AD + BD).$$

Так как точка D лежит между A и B (лемма 11), то $AD + BD = AB$. Поэтому

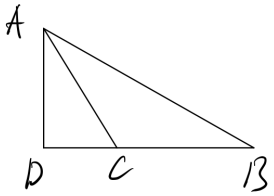
$$AC^2 + BC^2 = AB^2.$$

Теорема доказана.

2. Соотношения в косоугольном треугольнике

Непрямоугольный треугольник называется *косоугольным*.

Теорема 88. В любом косоугольном треугольнике квадрат стороны, лежащей против тупого угла, равен сумме квадратов двух других сторон, сложенной с удвоенным произведением одной из этих сторон на проекцию другой стороны.



Доказательство. Пусть ABC – данный треугольник с тупым углом C. Проведём высоту AD. Докажем сначала, что точка C лежит между B и D. Действительно, если точки B и D не разделяются точкой C, то в прямоугольном треугольнике ADC угол C тупой. А это невозможно. Итак, точка C разделяет точки B и D, то есть лежит между ними.

Применим теорему Пифагора к прямоугольным треугольникам ADB и ADC, получим

$$AB^2 = AD^2 + BD^2,$$
$$AC^2 = AD^2 + DC^2.$$

Вычитая эти равенства почленно, будем иметь $AB^2 - AC^2 = BD^2 - DC^2$.

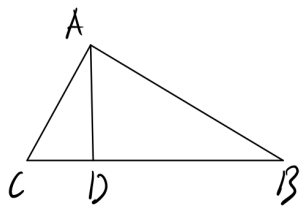
Так как точка C лежит между точками B и D, то $BD = BC + DC$. Заменяя в полученном равенстве BD^2 на $(BC + DC)^2$, после упрощений получаем

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2BC \cdot CD.$$

Теорема доказана.

Теорема 89. В любом косоугольном треугольнике квадрат стороны, лежащей против острого угла, равен сумме квадратов двух других сторон без удвоенного произведения одной из этих сторон на проекцию другой стороны.

Доказательство. Пусть ABC – данный треугольник с острым углом C. Проведём высоту AD. Прежде всего замечаем, что точка C не разделяет точки B и D. Действительно, в противном случае у прямоугольного треугольника ADC с прямым углом D внешний угол при вершине C был бы острый. А это невозможно. Поэтому либо точка D лежит между C и B, либо точка B лежит между C и D. Пусть для определённости



точка D лежит между C и B, как изображено на рисунке.

Применяя теорему Пифагора к треугольникам ADC и ADB, получим

$$AB^2 = BD^2 + AD^2,$$
$$AC^2 = CD^2 + AD^2.$$

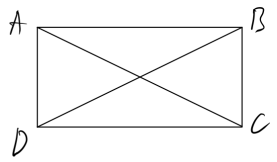
Вычитая эти равенства почленно, будем иметь $AB^2 - AC^2 = BD^2 - CD^2$.
Так как точка D лежит между B и C, то $BC = BD + CD$, то есть $BD = BC - CD$.
Заменяя в полученном равенстве BD^2 на $(BC - CD)^2$ и упрощая, получим

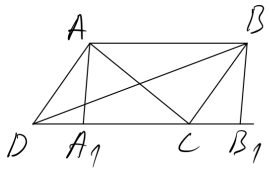
$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2BC \cdot CD.$$

Если точка B лежит между C и D, доказательство аналогично. Теорема доказана.

3. Соотношение между диагоналями и сторонами параллелограмма

Теорема 90. В любом параллелограмме сумма квадратов диагоналей равна сумме квадратов сторон.





Доказательство. Пусть $ABCD$ – данный параллелограмм, AC и BD – его диагонали. Если параллелограмм является прямоугольником, то по теореме Пифагора

$$AC^2 = AD^2 + DC^2,$$
$$BD^2 = BC^2 + DC^2.$$

Складывая эти равенства почленно и замечая, что $DC = AB$, получим

$$AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2.$$

Пусть теперь параллелограмм не является прямоугольником. Опустим перпендикуляры AA_1 и BB_1 на прямую CD. Из равенства треугольников ADA_1 и BCB_1 следует, что $DA_1 = CB_1$.

Углы ADC и BCD, как внутренние односторонние при параллельных AD и BC, дополняют друг друга до 180°. Поэтому если один из углов острый, то другой – тупой. Пусть для определённости угол ADC острый, а угол BCD тупой, как изображено на рисунке.

Применяя теорему 88 к треугольнику BCD и теорему 89 к треугольнику ADC, получим

$$BD^2 = BC^2 + CD^2 + 2DC \cdot CB_1,$$
$$AC^2 = AD^2 + CD^2 - 2DC \cdot DA_1.$$

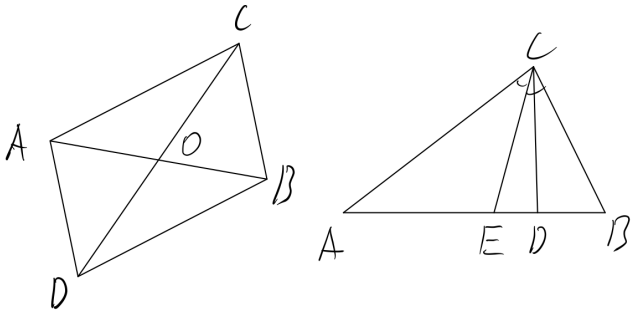
Складывая эти равенства почленно и замечая, что $CB_1 = DA_1$, $AB = CD$, получим

$$AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2.$$

Теорема доказана.

4. Медианы, биссектрисы и высоты треугольника

Задача. Дан треугольник *ABC*. Выразить медиану, биссектрису и высоту треугольника, проведённые из вершины *C*, через стороны треугольника.



1) Начнём с медианы треугольника. Пусть *O* – основание медианы. Построим точку *D*, симметричную точке *C* относительно точки *O*, тогда *OD* = *OC*. Применяя теорему 90 к параллелограмму *ACBD*, получим

$$AB^2 + (2OC)^2 = 2AC^2+2BC^2.$$

Отсюда находим медиану *OC*.

2) Найдём биссектрису *CE*. Согласно теореме 81 точка *E* делит сторону *AB* на отрезки, пропорциональные сторонам *AC* и *BC*. Это позволяет, зная *AB, AC* и *BC*, найти *AE* и *EB*. Допустим, что они уже найдены. Применяя теорему 88 или 89 к треугольникам *ABC* и *AEC*, получим

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 \pm 2AB\cdot AD,$$

$$EC^2 = AC^2 + AE^2 \pm 2AE\cdot AD.$$

Умножая первое равенство на *AE*, а второе на *AB* и вычитая их почленно, получим уравнение, содержащее только одно неизвестное – биссектрису *EC*. Из этого уравнения и находится биссектриса.

3) Найдём высоту *CD*. Прежде всего по теореме 88 или 89 находим отрезок *AD*. Затем из прямоугольного треугольника *ADC* находим высоту *CD*.

5. Существование треугольника с данными сторонами

Теорема 91. Каковы бы ни были три числа *a, b, c* такие, что сумма любых двух из этих чисел больше третьего, существует треугольник со сторонами, равными *a, b, c.*

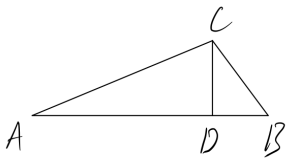
Доказательство. Расположим числа *a, b, c* в порядке возрастания. Пусть для определённости $a \le b \le c$. Обозначим

$$a_1 = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2c}.$$

Число $a_1 > 0$, так как $c \ge b$. Число a_1 меньше *a*. В самом деле,

$$a - a_1 = a - \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2c} = \frac{b^2 - (c-a)^2}{2c}.$$

Так как $a + b > c$, то $b > c - a \ge 0$. Поэтому $b^2 > (c - a)^2$. Следовательно, $a > a_1$.



Построим треугольник *ABC* следующим образом. Возьмём отрезок *AB*, равный *c*. Из точки *B* на полупрямой *BA* отложим отрезок *BD*, равный a_1. Из точки *D* восстановим перпендикуляр *DC*, равный $\sqrt{a^2 - a_1^2}$. Утверждаем, что треугольник *ABC* имеет стороны *a, b, c*.

Действительно, сторона *AB* равна *c*. Применяя теорему Пифагора к треугольнику *BDC*, получим

$$BC^2 = BD^2 + CD^2 = a_1^2 + (\sqrt{a^2 - a_1^2})^2 = a^2,$$

то есть *BC* = *a*. Применяя теорему 89 к треугольнику *ABC*, получим $AC^2 = a^2 + c^2 - 2ca_1 = b^2$, то есть *AC* = *b*. Теорема доказана.

6. Взаимное расположение двух окружностей

Теорема 92. Пусть даны две различные окружности с центрами O_1 и O_2, радиусами R_1 и R_2, такими, что $R_1 \le R_2$, и расстоянием между центрами *d*. Тогда:

1) окружности не имеют общих точек, если

$$R_1 + R_2 < d \text{ или } R_2 - R_1 > d;$$

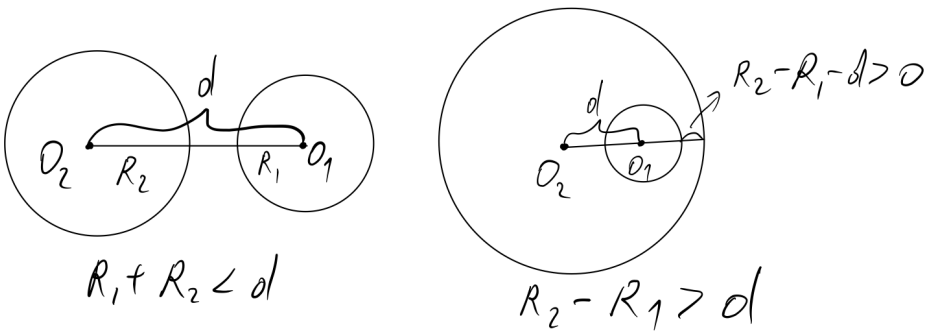
2) окружности имеют одну общую точку в которой они касаются, то есть имеют общую касательную, если

$$R_1 + R_2 = d \text{ или } R_2 - R_1 = d;$$

3) окружности пересекаются в двух точках, если

$$R_1 + R_2 > d \text{ и } R_2 - R_1 < d.$$

При этом точки пересечения окружностей симметричны относительно прямой, проходящей через их центры.



Доказательство. 1) Докажем первое утверждение теоремы.
Допустим, что окружности пересекаются и, следовательно, имеют общую точку *A* (¬). Рассмотрим возможные расположения точек *A*, O_1 и O_2.

Если точки *A*, O_1 и O_2 не лежат на одной прямой, то существует треугольник AO_1O_2 для сторон которого выполняется условие $O_1A + O_2A > O_1O_2 \Rightarrow R_1 + R_2 > d$, что противоречит условию $R_1 + R_2 < d$. Также для сторон треугольника AO_1O_2

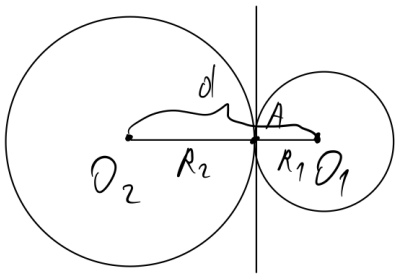
выполняется условие $O_1O_2 + O_1A > O_2A \Rightarrow d + R_1 > R_2 \Rightarrow R_2 - R_1 < d$, что противоречит условию $R_2 - R_1 > d$ ⊗.

Пусть точки A, O_1 и O_2 лежат на прямой. Если точка A лежит между O_1 и O_2, то $O_1A + AO_2 = O_1O_2 \Rightarrow R_1 + R_2 = d$. Это противоречит условию $R_1 + R_2 < d$. Проверим условие $R_2 - R_1 > d$. Так как $R_1 + R_2 = d$, то $R_2 - R_1 > R_1 + R_2 \Rightarrow -R_1 > R_1$, что невозможно. Следовательно, условие $R_2 - R_1 > d$ тоже не выполняется.

Если точка O_1 лежит между A и O_2, то $O_1A + O_1O_2 = AO_2 \Rightarrow R_1 + d = R_2 \Rightarrow R_2 - R_1 = d$. Это противоречит условию $R_2 - R_1 > d$. Проверим условие $R_1 + R_2 < d$. Так как $R_2 - R_1 = d$, то $R_1 + R_2 < R_2 - R_1 \Rightarrow R_1 < -R_1$, что невозможно. Следовательно, условие $R_1 + R_2 < d$ тоже не выполняется.

Если точка O_2 лежит между A и O_1, то $O_2A + O_2O_1 = AO_1 \Rightarrow R_2 + d = R_1$, что противоречит условию $R_1 \le R_2$ ⊗. Таким образом, окружности не могут иметь общей точки A.

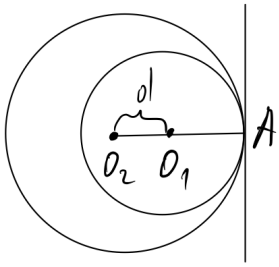
2) Докажем второе утверждение теоремы. Точно так же, как в первом случае, доказывается, что окружности не могут иметь общей точки A, не лежащей на прямой O_1O_2.



Пусть выполняется условие $R_1 + R_2 = d \Rightarrow R_2 < d$. Отложим на полупрямой O_2O_1 отрезок $O_2A = R_2$. Тогда точка A принадлежит окружности с центром O_2 и лежит между точками O_1 и $O_2 \Rightarrow O_1A + O_2A = O_1O_2 \Rightarrow O_1A = O_1O_2 - O_2A \Rightarrow O_1A = d - R_2 = R_1 \Rightarrow$ точка A принадлежит и окружности с центром O_1. Построим прямую, проходящую через точку A перпендикулярно O_1O_2. Эта прямая по определению будет касательной к обеим окружностям.

Допустим, что существует ещё одна точка A_1, общая для двух окружностей и лежащая на прямой O_1O_2. Если точка O_1 лежит между A_1 и O_2, то $O_1A_1 + O_2O_1 = A_1O_2 \Rightarrow R_1 + d = R_2 \Rightarrow d = R_2 - R_1$. С учётом условия $R_1 + R_2 = d$, получаем $R_1 = -R_1$, что невозможно. Аналогично проверяется случай, когда точка O_2 лежит между A_1 и O_1. Если точка A_1 лежит между O_1 и O_2, то $O_1A_1 = O_1A$, то есть точка A_1 совпадает с A в соответствии с аксиомой V.

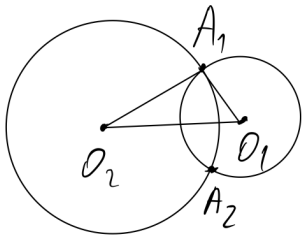
Пусть выполняется условие $R_2 - R_1 = d \Rightarrow R_2 = d + R_1 \Rightarrow R_2 < d$. Отложим на полупрямой O_2O_1 отрезок $O_2A = R_2$. Тогда точка A принадлежит окружности с



центром O_2 и так как $R_2 < d$, то O_1 лежит между O_2 и $A \Rightarrow O_1O_2 + O_1A = O_2A \Rightarrow O_1A = O_2A - O_1O_2 = R_2 - d = R_1 \Rightarrow$ точка A лежит и на окружности с центром O_1. Построим прямую, проходящую через точку A перпендикулярно O_1O_2. Эта прямая по определению будет касательной к обеим окружностям.

Допустим, что существует ещё одна точка A_1, общая для двух окружностей и лежащая на прямой O_1O_2. Если точка A_1 лежит между O_1 и O_2, то $A_1O_1 + A_1O_2 = O_1O_2 \Rightarrow R_1 + R_2 = d$, что противоречит условию $R_2 - R_1 = d$ так как тогда $R_2 - R_1 = R_1 + R_2 \Rightarrow -R_1 = R_1$. Если точка O_2 лежит между A_1 и O_1, то $A_1O_2 + O_1O_2 = AO_1 \Rightarrow R_2 + d = R_1 \Rightarrow R_2 - R_1 = -d$, что противоречит условию $R_2 - R_1 = d$. Если точка O_1 лежит между A_1 и O_2, то так как $O_2A = R_2$, точка A_1 совпадает с A.

3) Докажем третье утверждение теоремы. Заметим, что можно построить



треугольник со сторонами, равными R_1, R_2 и d. По условию $R_1 + R_2 > d$ и $R_2 - R_1 < d \Rightarrow R_1 + d > R_2$ и так как $R_1 \le R_2$, то $R_2 + d > R_1$. Возьмём отрезок O_1O_2 за сторону, равную d и построим вершину A_1 так, чтобы $O_1A_1 = R_1$ и $O_2A_1 = R_2$ (как в док-ве т. 91). Тогда точка A_1 принадлежит обеим окружностям. Зеркально отразим A_1 относительно прямой O_1O_2, получим точку A_2. По свойству симметрии $O_1A_2 = O_1A_1 = R_1$ и $O_2A_2 = O_2A_1 = R_2$, значит, A_2 тоже принадлежит обеим окружностям. Таким образом, точки A_1 и A_2 являются точками пересечения данных окружностей.

Докажем, что окружности не имеют других точек пересечения. Допустим, что существует ещё одна точка A, принадлежащая обеим окружностям. Аналогично случаю 1 доказывается, что точка A не может лежать на прямой O_1O_2. Значит, A лежит либо в полуплоскости точки A_1, либо в полуплоскости точки A_2. Пусть, например, точка A лежит в полуплоскости точки A_1. Тогда $\Delta O_1O_2A_1 = \Delta O_1O_2A$ по третьему признаку. Из равенства треугольников следует, что $\angle O_1O_2A_1 = \angle O_1O_2A \Rightarrow$ лучи O_2A_1 и O_2A совпадают, а из равенства $O_2A_1 = O_2A$ следует, что точка A совпадает с точкой A_1. Таким образом, окружности имеют только две общие точки. Теорема доказана.

§13. Геометрические построения

1. Инструменты построения

Построение геометрической фигуры является основным (неопределяемым) понятием. Помимо слова «построить» используются разнообразные синонимы: «провести» (прямую), «описать» (окружность), «отложить» (отрезок) и другие.

Построение выполняется с помощью *инструментов* – линейки и циркуля.

Линейка как инструмент геометрических построений позволяет провести прямую. В частности, линейкой можно построить произвольную прямую; произвольную прямую, проходящую через построенную точку; прямую, проходящую через две построенные точки.

Если построены две точки и проходящая через них прямая, то построен отрезок с концами в этих точках и полупрямые, определяемые этими точками. Таким образом, с помощью линейки можно построить отрезок, соединяющий две построенные точки, и полупрямую, исходящую из построенной точки и проходящую через другую построенную точку.

Циркуль как инструмент геометрических построений позволяет описать окружность. При этом центр окружности может быть произвольным или уже построенным; радиус окружности может быть произвольным или равным построенному отрезку.

Если построена окружность и две лежащие на ней точки, то построены дуги окружности с концами в этих точках. Таким образом, циркулем можно построить любую их двух дополнительных дуг окружности, если построены концы этих дуг и центр окружности.

Задача на построение фигуры считается решённой, если указана конечная последовательность осуществимых построений (алгоритм построения), и доказано, что в результате выполнения указанных построений получается фигура с требуемыми свойствами.

Решая задачи на построение придерживаются следующих правил.

1) В условии задачи на построение каждая данная фигура считается построенной.
2) Если построены две фигуры, то построена и общая часть этих фигур (например, их точки пересечения), либо установлено, что её нет. В том числе одна фигура может оказаться частью другой. Часть построенных фигур, не являющаяся для них общей, также построена, либо установлено, что фигуры совпадают.
3) Если построены две фигуры, то построена фигура, состоящая из них (например, если построены три точки и соединяющие их отрезки, то построен треугольник с вершинами в этих точках).
4) Можно построить произвольную точку заведомо принадлежащую построенной фигуре или заведомо не принадлежащую построенной фигуре.

<u>Замечание</u>. Благодаря четвёртому правилу можно считать, что линейка позволяет проводить прямую только через две построенные точки, а циркуль позволяет

построить окружность только с построенным центром и данным радиусом. Произвольные прямые и окружности с произвольным центром и радиусом можно построить, выбрав с помощью правила 4 произвольные точки плоскости.

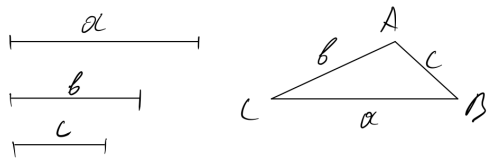
Задача 0. Отложить на данной прямой от данной точки отрезок, равный данному отрезку.
Пусть *O* – данная точка прямой *a*, *CD* – данный отрезок.
Построим окружность с центром *O* и радиусом *CD*. Обозначим *A* и *B* точки пересечения окружности с прямой *a*. Отрезки *OA* и *OB* искомые.

Таким образом, циркулем можно отложить от построенной точки на построенной прямой отрезок, равный построенному отрезку.

2. Основные задачи на построение

Задача 1. Построить треугольник с данными сторонами *a, b, c*.

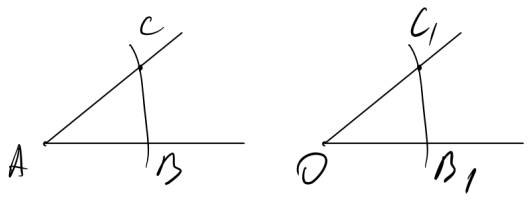
1) Проведём произвольную прямую и отметим на ней произвольную точку *B*.
2) Отложим на прямой отрезок *BC*, равный *a*.



3) Построим окружность с центром *B* и радиусом *b*.
4) Построим окружность с центром *C* и радиусом *c*. Обозначим *A* точку пересечения двух окружностей.
5) Проведём отрезки *AB* и *AC*.

Треугольник *ABC* имеет стороны, равные *a, b, c*, то есть является искомым. Задача имеет решение если отрезки *a, b, c* удовлетворяют условиям теоремы 91.

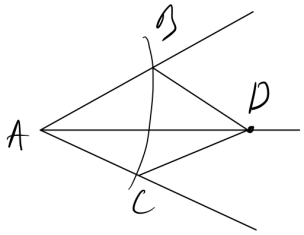
Задача 2. Отложить от данной полупрямой в данную полуплоскость угол, равный данному углу.
Пусть ∠*A* – данный угол, *O* – начальная точка данной полупрямой.



1) Проведём произвольную окружность с центром в вершине *A* данного угла. Обозначим *B* и *C* точки пересечения окружности со сторонами угла.
2) Проведём окружность радиуса *AB* с центром в точке *O* (начальной точке данной полупрямой). Обозначим B_1 точку пересечения окружности с полупрямой.
3) Построим окружность с центром B_1 и радиусом *BC*. Обозначим C_1 точку пересечения двух окружностей, лежащую в данной полуплоскости.
4) Построим полупрямую OC_1.

Из равенства треугольников ABC и OB_1C_1 (по третьему признаку) следует, что угол C_1OB_1 равен углу A, то есть является искомым.

Задача 3. Построить биссектрису данного неразвёрнутого угла.
Пусть $\angle A$ – данный угол.

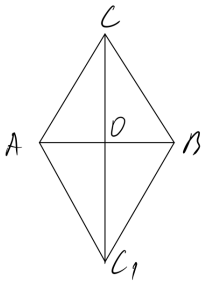


1) Построим окружность произвольного радиуса с центром в точке A. Обозначим B и C точки пересечения окружности со сторонами угла.
2) Построим окружности с центрами B и C с тем же радиусом. Обозначим D их точку пересечения, отличную от точки A.
3) Построим полупрямую AD.

Докажем, что точка D будет существовать. Так как данный угол неразвёрнутый, существует треугольник ABC в котором $BC < AB + AC$, то есть расстояние между центрами проводимых на втором шаге окружностей меньше суммы их радиусов. Разность радиусов построенных окружностей равна нулю, следовательно, она меньше расстояния между их центрами. Значит, выполняются условия пункта 3 теоремы 92.

Из равенства треугольников ABD и ACD следует, что $\angle BAD = \angle CAD$. Докажем теперь, что полупрямая AD проходит между сторонами угла BAC. Точки D и A лежат в разных полуплоскостях относительно BC (т. 92), тогда отрезок AD пересекает прямую BC в некоторой точке O. Из равенства треугольников BAO и CAO по первому признаку следует, что $CO = BO$, следовательно, точка O – является серединой отрезка BC, то есть принадлежит ему (след. т. 6 и опр. 6). Значит, полупрямая AD разделяет стороны угла BAC и является искомой биссектрисой.

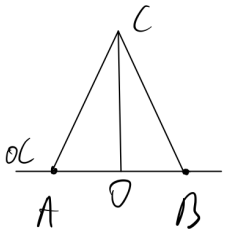
Задача 4. Разделить данный отрезок пополам.
Пусть AB – данный отрезок.



1) Проведём окружности радиуса AB с центрами A и B. Сумма радиусов окружностей больше AB, а разность равна нулю. Значит, по теореме 92 эти окружности имеют две точки пересечения, лежащие по разные стороны от прямой AB. Обозначим эти точки C и C_1.
2) Построим прямую CC_1, она пересечёт прямую AB в точке O.

$\Delta CAC_1 = \Delta CBC_1$ по третьему признаку $\Rightarrow \angle ACO = \angle BCO \Rightarrow \Delta ACO = \Delta BCO$ по первому признаку $\Rightarrow AO = BO \Rightarrow O$ – искомая середина AB.

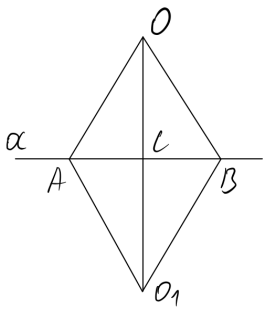
Задача 5. Из данной точки O, лежащей на прямой a, построить прямую, перпендикулярную a.



1) Из точки O проведём произвольным радиусом окружность. Обозначим A и B точки пересечения этой окружности с прямой a.
2) Проведём окружности с радиусом AB и центрами A и B. По теореме 92 эти окружности пересекаются ($2AB > AB$ и $AB - AB < AB$). Обозначим C одну из их точек пересечения.
3) Построим прямую OC.

$\Delta ACO = \Delta BCO$ по третьему признаку $\Rightarrow$ смежные углы COA и COB равны $\Rightarrow$ эти углы прямые $\Rightarrow$ OC – искомая прямая.

Задача 6. Через данную точку O, не лежащую на данной прямой a, провести прямую, перпендикулярную прямой a.



1) Отметим произвольную точку A прямой a. Построим окружность с центром O и радиусом OA. Эта окружность пересечёт прямую a ещё в одной точке B (если только нам не повезло так, что OA это и есть искомая прямая).
2) Построим окружности с тем же радиусом и центрами A и B. Так как точки A, O, B не лежат на одной прямой, то $AB < AO + OB$ и $AO - OB = 0 < AB$, следовательно, выполняются условия пункта 3 теоремы 92, то есть окружности пересекаются в двух точках. Обозначим O_1 их точку пересечения, отличную от точки O. Точки O и O_1 лежат в разных полуплоскостях относительно прямой a.
3) Проведём прямую OO_1. Обозначим C – точку пересечения этой прямой и a.

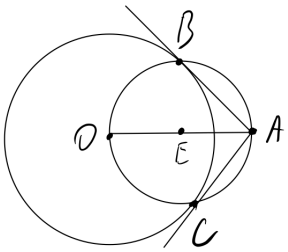
$\Delta AOO_1 = \Delta BOO_1$ по третьему признаку $\Rightarrow$ $\angle AOO_1 = \angle BOO_1 \Rightarrow \Delta AOC = \Delta BOC$ по первому признаку $\Rightarrow$ смежные углы ACO и BCO равны $\Rightarrow$ эти углы прямые $\Rightarrow$ OO_1 – искомая прямая.

3. Примеры решения задач на построение

Задача 7. Через данную точку провести прямую, параллельную данной прямой. Пусть B – данная точка, a – данная прямая.

1) Проведём через точку B прямую b, перпендикулярную прямой a (задача 6).
2) Проведём через точку B прямую, перпендикулярную b. Эта прямая и есть искомая.

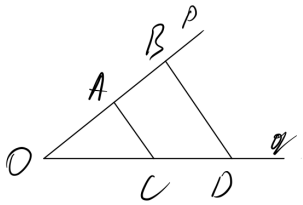
Задача 8. Построить касательные к данной окружности с центром *O*, которые проходят через данную точку *A*, лежащую на расстоянии большем радиуса окружности от *O*.



1) Проведём отрезок *OA* и разделим его пополам (задача 4). Обозначим *E* – середину *OA*.
2) Построим окружность с центром *E* и радиусом *EA*. Обозначим *B* и *C* точки пересечения этой окружности с данной.
3) Проведём полупрямые *AB* и *AC*.

Углы *OBA* и *OCA* прямые, так как опираются на диаметр построенной окружности, следовательно, *AB* и *AC* – искомые касательные.

Задача 9. Даны три отрезка *a, b, c*. Построить отрезок $x = \frac{bc}{a}$.

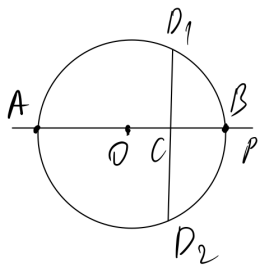


1) Проведём произвольную прямую и отметим точку *O*, лежащую на этой прямой и некоторую точку, не лежащую на этой прямой.
2) Через две построенные точки проведём ещё одну прямую. Обозначим *p* и *q* – полупрямые с началом *O*, не лежащие на одной прямой.
3) На полупрямой *p* отложим отрезки *OA* = *a* и *OB* = *b*. На полупрямой *q* отложим отрезок *OC* = *c*.
4) Построим прямую *AC* и построим прямую, проходящую через точку *B* параллельно *AC* (задача 7). Обозначим *D* точку пересечения этой прямой с полупрямой *q*.

Из подобия треугольников *OAC* и *OBD* следует, что $\frac{OD}{OC} = \frac{OB}{OA}$. Отсюда $OD = \frac{OB \cdot OC}{OA} = \frac{bc}{a}$. Таким образом, *OD* – искомый отрезок.

Задача 10. Даны два отрезка *a* и *b*. Построить отрезок $x = \sqrt{ab}$.

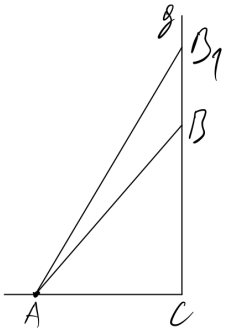
1) Проведём произвольную прямую *p* и отметим на ней точку *C*.



2) Отложим от точки *C* в разные стороны на прямой *p* отрезки *CA* = *a* и *CB* = *b*.
3) Разделим отрезок *AB* пополам и обозначим *O* его середину (задача 4).
4) Построим окружность с центром *O* и радиусом *OA*.
5) Построим прямую, проходящую через точку *C* и перпендикулярную *AB* (задача 5). Обозначим D_1 и D_2 точки пересечения этой прямой с окружностью.

Из равенства прямоугольных треугольников OCD_1 и OCD_2 следует, что $CD_1 = CD_2$, а по теореме 82 $CD_1 \cdot CD_2 = AC \cdot BC = ab$, следовательно, отрезок $CD_1 = \sqrt{ab}$ является искомым.

Задача 11. Даны отрезки a и b. Построить отрезки $\sqrt{a^2+b^2}, \sqrt{a^2-b^2}$, если $a > b$.



1) Проведём произвольную прямую и отметим на ней точку A.
2) Отложим на прямой от точки A отрезок $AC = b$.
3) Проведём через точку C прямую g, перпендикулярную к прямой AC (задача 5).
4) Отложим на прямой g от точки C отрезок $CB_1 = a$. По теореме Пифагора отрезок $AB_1 = \sqrt{a^2+b^2}$ является искомым.
5) Проведём окружность с центром A и радиусом a. Обозначим B точку пересечения этой окружности с прямой g. Тогда $CB = \sqrt{a^2-b^2}$ второй искомый отрезок.

Задача 12. Разделить данный отрезок AB на n равных частей.
1) Проведём из точки A произвольную полупрямую a, отличную от AB.
2) Отложим на полупрямой a равные отрезки AA_1, A_1A_2, A_2A_3 … $A_{n-1}A_n$.
3) Проведём через точки A_n и B прямую b.
4) Проведём прямые, параллельные b и проходящие через точки $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$. Эти прямые пересекают отрезок AB в точках $B_1, B_2, \dots, B_{n-1}$, которые делят AB на n равных частей (т. 58).

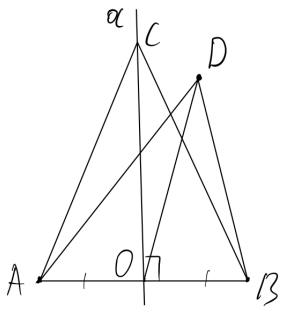
4. Геометрическое место точек

Определение 80. *Геометрическим местом точек* называется фигура, которая состоит из всех точек плоскости, обладающих определённым свойством.

Пример. Окружность является геометрическим местом точек, равноудалённых от данной точки (центра).

Теорема 93. Геометрическое место точек, равноудалённых от двух данных точек, есть прямая, проходящая через середину отрезка с концами в этих точках и перпендикулярная прямой, содержащей эти две точки.
Доказательство. Пусть A и B – данные точки, a – прямая, проходящая через середину O отрезка AB перпендикулярно прямой AB. Необходимо доказать, что каждая точка прямой a равноудалена от точек A и B и что каждая точка D плоскости, равноудалённая от точек A и B, лежит на прямой a.

То, что каждая точка C прямой a находится на одинаковом расстоянии от точек A и B, следует из равенства треугольников AOC и BOC. У этих треугольников углы при

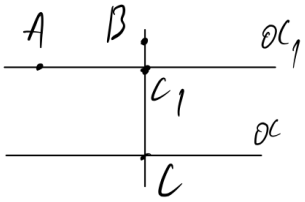


вершине O прямые, сторона OC общая, а $AO = OB$, так как O – середина отрезка AB. Покажем теперь, что каждая точка D плоскости, равноудалённая от точек A и B, лежит на прямой a.

Рассмотрим треугольник ADB. Он равнобедренный, так как $AD = BD$, поэтому медиана DO является высотой. Следовательно, точка D принадлежит прямой, проходящей через точку O перпендикулярно прямой AB, то есть прямой a (т. 31). Теорема доказана.

Задача. Найти геометрическое место точек, расположенных в одной полуплоскости относительно прямой a и равноудалённых от этой прямой.

Возьмём какую-нибудь точку A геометрического места точек и проведём через неё прямую a_1, параллельно a. По теоремам 29 и 49 все точки прямой a_1 принадлежат искомому геометрическому месту точек. Докажем, что этой прямой оно и ограничивается.



Пусть B – произвольная точка геометрического места точек. Проведём через точку B прямую, перпендикулярную прямой a. Она пересечёт прямую a в некоторой точке C, а прямую a_1 в некоторой точке C_1. Так как точки C_1 и B не разделяются точкой C, то из равенства $C_1C = BC$ следует, что точки B и C_1 совпадают (акс. V), то есть точка B лежит на прямой a_1.

Геометрическое место точек плоскости, расположенных по одну сторону от данной прямой a и равноудалённых от этой прямой, есть прямая, параллельная a.

5. Метод геометрических мест

Сущность метода геометрических мест, используемого при решении задач на построение, состоит в следующем. Пусть, решая задачу на построение, нам надо найти точку X, удовлетворяющую двум условиям. Геометрическое место точек, удовлетворяющих первому условию, есть некоторая фигура F_1, а геометрическое место точек, удовлетворяющих второму условию, есть некоторая фигура F_2. Искомая точка X принадлежит F_1 и F_2, то есть является их точкой пересечения. Если эти геометрические места простые (скажем, состоят из прямых и окружностей), то мы можем их построить и найти интересующую нас точку X.

Задача. Даны три точки: A, B, C. Постройте точку X, которая одинаково удалена от точек A и B и находится на данном расстоянии от точки C.

Искомая точка X удовлетворяет двум условиям: 1) она одинаково удалена от точек A и B, 2) она находится на данном расстоянии от точки C. Геометрическое место

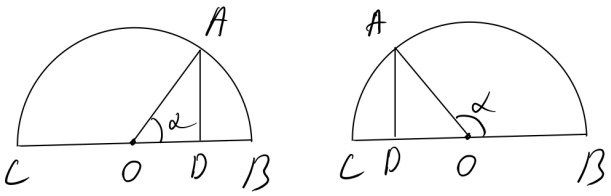
точек, удовлетворяющих первому условию, есть прямая, перпендикулярная отрезку *AB* и проходящая через его середину. Геометрическое место точек, удовлетворяющих второму условию, есть окружность данного радиуса с центром в точке *C*. Искомая точка *X* лежит на пересечении этих геометрических мест.

§14. Тригонометрические функции углов

1. Определение тригонометрических функций

Определение 81. Проведём полуокружность *BC* с центром *O* и радиусом, равным единице. Возьмём на полуокружности произвольную точку *A* и обозначим через *α* угол *AOB*. Опустим из точки *A* перпендикуляр *AD* на диаметр *BC*. *Синусом* угла *α* (sin *α*) называется длина отрезка *AD*. По определению считаем sin 0° = 0, sin 180° = 0.

Косинусом острого угла *α* (cos *α*) называется длина отрезка *OD*. Косинусом тупого угла *α* называется отрицательное число, по абсолютной величине равное длине отрезка *OD*. По определению считаем cos 0° = 1, cos 90° = 0, cos 180° = –1.



Тангенсом α называется отношение sin *α* и cos *α*: $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$. Для угла 90° тангенс не определён. *Котангенсом* неразвёрнутого угла *α* называется отношение cos *α* и sin *α*: $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

Синус, косинус, тангенс и котангенс называются *тригонометрическими функциями* угла *α*.

Теорема 94. Для любого *α*

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

Доказательство. При *α* = 0°, 90°, 180° утверждение теоремы проверяется подстановкой соответствующих значений синуса и косинуса. При остальных углах *α* утверждение теоремы следует из теоремы Пифагора в применении её к треугольнику *ODA* (см. рисунок выше). Теорема доказана.

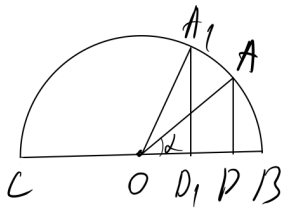
2. Формулы приведения

Формулы, устанавливающие связь между тригонометрическими функциями углов *α*, 90° – *α*, 180° – *α*, называются *формулами приведения*.

Теорема 95. Если угол *α* острый, то

$$\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha,$$
$$\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha,$$
$$\operatorname{tg}(90° - \alpha) = \operatorname{ctg}\alpha.$$

Доказательство. Пусть угол AOB равен α, а угол A_1OB равен $90° - \alpha$. Так как оба угла острые, точки D и D_1 принадлежат полупрямой OB. Поэтому углы AOD и AOD_1 совпадают с углами AOB и A_1OB. Прямоугольные треугольники ODA и A_1D_1O равны, так как у них гипотенузы равны как радиусы, а углы AOD и OA_1D_1 равны α. Из равенства этих треугольников следует, что $A_1D_1 = OD$, $OD_1 = AD$, то есть

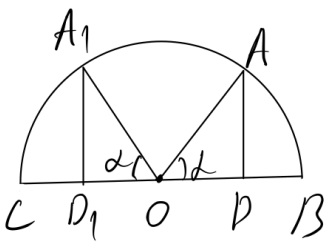


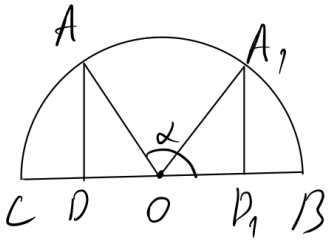
$$\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha,$$
$$\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha.$$

Третья формула получается почленным делением первой на вторую. Теорема доказана.

Теорема 96. Для любого α

$$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha,$$
$$\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha.$$





Доказательство. При $\alpha = 0°, 90°, 180°$ утверждение теоремы проверяется подстановкой в формулы соответствующих значений синуса и косинуса. Рассмотрим общий случай. Пусть $\angle AOB = \alpha$, а $\angle A_1OB = 180° - \alpha$. Опустим перпендикуляры AD и A_1D_1 к BC. Если угол α – острый, то угол $180° - \alpha$ – тупой. Тогда точка D_1 не может лежать на полупрямой OB, так как в этом случае угол A_1OD_1 в прямоугольном треугольнике OA_1D_1 был бы тупым. Значит, точка D_1 лежит на полупрямой OC и угол $A_1OD_1 = \alpha$ как смежный углу, равному $180° - \alpha$. Аналогично доказывается, что точка D лежит на полупрямой OB. Тогда из равенства треугольников OAD и OA_1D_1 следует, что $AD = A_1D_1$, то есть $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$, и $OD = OD_1$. Поскольку угол $180° - \alpha$ – тупой, $\cos(180° - \alpha) = -OD_1 = -\cos\alpha$.

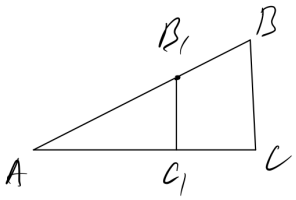
Если угол α – тупой, а угол $180° - \alpha$ – острый, точка D_1 лежит на полупрямой OB, а точка D – на полупрямой OC. Тогда угол $AOD = 180° - \alpha$ как смежный углу, равному α. Снова из равенства треугольников OAD и OA_1D_1 заключаем, что $AD = A_1D_1$, то есть $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$, и $OD = OD_1$. Поскольку угол α – тупой, $\cos\alpha = -OD$. Тогда $\cos(180° - \alpha) = OD_1 = OD = -\cos\alpha$. Теорема доказана.

3. Соотношения между сторонами и углами в прямоугольном треугольнике

Теорема 97. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C

$$BC = AB\cdot\sin A,\quad AC = AB\cdot\cos A,\quad BC = AC\cdot\operatorname{tg} A.$$

Доказательство. Отложим на полупрямой AB отрезок AB_1, равный единице, и



опустим перпендикуляр из точки B_1 на прямую AC. Точка C_1 принадлежит полупрямой AC, так как иначе угол B_1AC_1 прямоугольного треугольника AB_1C_1 был бы тупым, как смежный острому углу A. По определению синуса и косинуса $\sin A = B_1C_1$, $\cos A = AC_1$. Треугольники AB_1C_1 и ABC подобны, так как у них угол A общий, а углы C и C_1 прямые. Отсюда следует, что

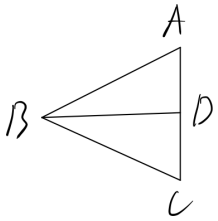
$$\frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AB}{1},\quad \frac{AC}{AC_1} = \frac{AB}{1},\quad \frac{BC}{AC} = \frac{B_1C_1}{AC_1}.$$

Подставляя сюда $B_1C_1 = \sin A$, $AC_1 = \cos A$, получим $BC = AB\cdot\sin A$, $AC = AB\cdot\cos A$, $BC = AC\cdot\operatorname{tg} A$. Теорема доказана.

Теорема 98.

$$\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}},\quad \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}},\quad \operatorname{tg} 45^\circ = 1,\quad \sin 30^\circ = \frac{1}{2},\quad \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2},\quad \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Доказательство. Построим равнобедренный прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C. В нём углы A и B равны 45°. Применяя теорему Пифагора, получим $AB^2 = AC^2 + BC^2 = 2BC^2 = 2AC^2$. Отсюда по теореме 97 получаем $\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Следовательно, $\operatorname{tg} 45^\circ = 1$.



Построим теперь равносторонний треугольник ABC. Все его углы равны 60°. Проведём медиану BD треугольника. Она является биссектрисой и высотой. Поэтому в треугольнике ABD угол ADB прямой, а угол ABD равен 30°. Так как $AD = \frac{AC}{2} = \frac{AB}{2}$, то $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$. По теореме 94 отсюда находим $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$. После этого $\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Теорема доказана.

Формулы приведения позволяют найти синусы, косинусы и тангенсы ряда других углов: 60°, 120°, 135°, 150°, выразив их через синусы, косинусы и тангенсы углов 30° и 45°.

4. Теорема косинусов

Теорема 99 (теорема косинусов). Квадрат любой стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон без удвоенного произведения этих сторон на косинус угла между ними.

Доказательство. Пусть ABC – данный треугольник. Докажем, что $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos C$.

Если угол C равен 90°, то утверждение теоремы следует из теоремы Пифагора, так как $\cos 90° = 0$.

Проведём высоту AD. Пусть C – острый угол. Тогда по теореме 89

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2BC \cdot CD.$$

Как было установлено при доказательстве теоремы 89, точка C не разделяет точки B и D. То есть полупрямые CB и CD совпадают. По теореме 97 в применении к треугольнику ACD имеем $CD = AC \cdot \cos C$. Поэтому

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos C.$$

Пусть теперь C – тупой угол. По теореме 88

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2BC \cdot CD.$$

Как было установлено при доказательстве теоремы 88, точка C лежит между точками B и D. Значит, полупрямые CB и CD дополнительные. По теореме 97 в применении к треугольнику ADC имеем $CD = AC \cdot \cos \angle ACD$. Но угол ACD смежный с углом C треугольника ABC, поэтому $\angle ACD = 180° - \angle C$. Значит, по теореме 96 $\cos \angle ACD = -\cos C$ и, следовательно, $CD = -AC \cdot \cos C$. Таким образом, и в случае тупого угла

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos C.$$

Теорема доказана.

5. Теорема синусов

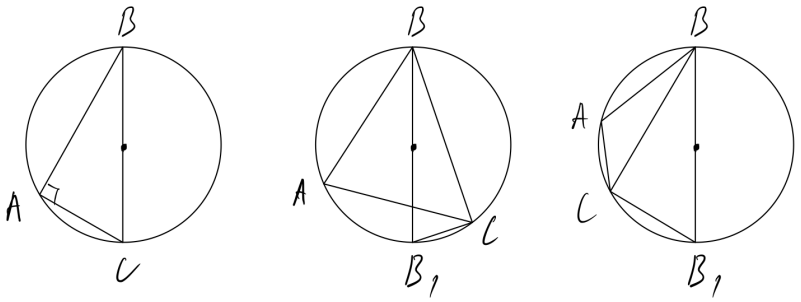
Теорема 100 (теорема синусов). В любом треугольнике ABC

$$\frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C} = 2R,$$

где R – радиус описанной окружности.

Доказательство.

Опишем около треугольника ABC окружность. Построим диаметр, одним из концов которого, является точка B. Если вторым концом диаметра окажется точка C, то угол BAC – прямой. Тогда $BC = 2R$, и поскольку $\sin 90° = 1$ (опр. 81), можно записать $BC = 2R \cdot \sin A \Rightarrow \frac{BC}{\sin A} = 2R$. Если вторым концом диаметра окажется точка A, то угол BCA – прямой. Тогда по теореме 97 в применении её к треугольнику ABC имеем $BC = BA \cdot \sin A = 2R \cdot \sin A \Rightarrow \frac{BC}{\sin A} = 2R$.



В остальных случаях обозначим B_1 второй конец диаметра, исходящего из точки B. Если точки A и B_1 лежат по одну сторону от прямой BC, то углы BB_1C и BAC равны, как вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу. Если точки A и B_1 лежат по разные стороны от прямой BC, то эти углы дополняют друг друга до 180°, поскольку опираются на дополнительные дуги. В обоих случаях $\sin B_1 = \sin A$ (т. 96).

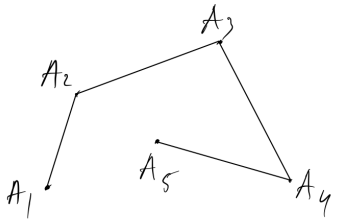
Таким образом, $BC = 2R \cdot \sin A$ (т. 97) $\Rightarrow \dfrac{BC}{\sin A} = 2R$.

Аналогично доказывается, что $\dfrac{AC}{\sin B} = 2R$ и $\dfrac{AB}{\sin C} = 2R$. Теорема доказана.

Теорема косинусов и теорема синусов дают возможность найти все элементы треугольника, то есть его углы и стороны, если заданы три элемента, однозначно определяющие треугольник. Таким элементами являются: три стороны треугольника, две стороны и угол, заключённый между ними, сторона и два угла.

§15. Многоугольники

1. Ломаная



Определение 82. *Ломаной* $A_1A_2A_3\ldots A_n$ называется фигура, которая состоит из точек $A_1, A_2, \ldots, A_n$ и соединяющих их отрезков $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_{n-1}A_n$. Точки $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называются *вершинами* ломаной, а отрезки $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_{n-1}A_n$ – *звеньями* ломаной. Точки A_1 и A_n называются *концами ломаной*.

Определение 83. Ломаная называется *простой*, если она не имеет самопересечений, то есть ни одна её точка не принадлежит более чем одному звену, вершины не принадлежат звеньям и никакие из вершин, кроме разве что концов, не совпадают.

Определение 84. *Длиной ломаной* называется сумма длин её звеньев.

Теорема 101. Длина ломаной не меньше длины отрезка, соединяющего её концы. Если ломаная не совпадет с отрезком, соединяющим её концы, то её длина больше длины этого отрезка.

Доказательство. Пусть $A_1A_2A_3\ldots A_n$ – данная ломаная. Заменим звенья ломаной A_1A_2 и A_2A_3 одним звеном A_1A_3. Получим ломаную $A_1A_3A_4\ldots A_n$. По неравенству треугольника она имеет длину, не большую, чем исходная ломаная. Если точка A_2 не совпадает с точками A_1 или A_3, то полученная ломаная меньше исходной (т. 41). Заменяя таким же способом звенья A_1A_3 и A_3A_4 звеном A_1A_4, переходим к ломаной $A_1A_4A_5\ldots A_n$. И так далее. В конце концов мы придём к отрезку A_1A_n, соединяющему концы ломаной. Отсюда следует, что исходная ломаная имела длину, не меньшую длины отрезка A_1A_n. Если исходная ломаная не совпадала с отрезком A_1A_n, то её длина больше длины этого отрезка. Теорема доказана.

Теорема 102. Если концы ломаной $A_1A_2A_3\ldots A_n$ лежат в разных полуплоскостях относительно прямой a, то ломаная пересекает прямую a.
Доказательство. Следуя вдоль ломаной от вершины A_1 к A_n мы можем встретить вершину A_k, лежащую на прямой a, так что вершины A_{k-1} и A_{k+1} лежат в разных полуплоскостях относительно прямой a. Тогда ломаная пересекает прямую a в вершине A_k. В другом случае мы должны встретить две соседний вершины, лежащие в разных полуплоскостях относительно прямой a (иначе концы ломаной принадлежали бы одной полуплоскости). Звено ломаной, соединяющее эти вершины, пересекается с прямой a. Следовательно, ломаная пересекает прямую a. Теорема доказана.

2. Выпуклые многоугольники

Определение 85. Ломаная называется *замкнутой*, если её концы совпадают. Простая замкнутая ломаная называется *многоугольником*, если её соседние звенья не лежат на одной прямой. Вершины ломаной называются *вершинами многоугольника*, а звенья ломаной – *сторонами многоугольника*. Отрезки, соединяющие не соседние вершины многоугольника, называются *диагоналями*. Многоугольник с n вершинами, а значит, и с n сторонами, называется *n-угольником*.

В частности, четырёхугольник является многоугольником с четырьмя сторонами, треугольник – многоугольником с тремя сторонами.

Определение 86. Многоугольник называются *выпуклым*, если он расположен в одной полуплоскости относительно любой прямой, содержащей его сторону (за исключением самой этой стороны и её концов).

Теорема 103. Если прямая имеет три общие точки с выпуклым многоугольником, то она содержит его сторону.
Доказательство. Пусть A, B, C – три точки прямой a, принадлежащие многоугольнику. Пусть, для определённости, точка B лежит между A и C. Точка B принадлежит одной из сторон многоугольника. Утверждаем, что эта сторона принадлежит прямой a. Действительно, в противном случае прямая, содержащая эту сторону, разделяла бы точки A и C. А это противоречит условию выпуклости

многоугольника. Заметим, что точка B не может являться вершиной многоугольника, поскольку в этом случае, даже если прямая a содержит одну из сторон, исходящих из точки B, точки A и C разделялись бы прямой, содержащей другую сторону с концом B. Теорема доказана.

3. Сумма углов выпуклого многоугольника

Теорема 104. Пусть A_1A_p диагональ выпуклого многоугольника $A_1A_2\ldots A_n$. Тогда полупрямая A_1A_p проходит между полупрямыми A_1A_2 и A_1A_n. Диагональ A_1A_p разделяет данный многоугольник на два выпуклых многоугольника $A_1A_2\ldots A_p$ и $A_pA_{p+1}\ldots A_nA_1$. Эти многоугольники лежат в разных полуплоскостях относительно прямой A_1A_p.

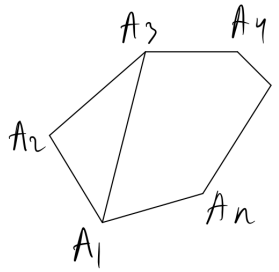
Доказательство. Поскольку многоугольник выпуклый, точки A_p и A_n лежат по одну сторону от прямой A_1A_2, следовательно, полупрямые A_1A_p и A_1A_n отложены в одну полуплоскость относительно A_1A_2. Значит, либо полупрямая A_1A_p проходит между полупрямыми A_1A_2 и A_1A_n, либо полупрямая A_1A_n проходит между полупрямыми A_1A_2 и A_1A_p (т. 24). Но полупрямая A_1A_n не может проходить между A_1A_2 и A_1A_p, так как в этом случае она должна разделять эти полупрямые (т. 22), что противоречит условию выпуклости многоугольника $A_1A_2\ldots A_n$. Значит, полупрямая A_1A_p проходит между полупрямыми A_1A_2 и A_1A_n и разделяет эти стороны многоугольника.

Докажем остальные утверждения теоремы. Прямая A_1A_p не имеет других общих точек с многоугольником, кроме точек A_1 и A_p. Действительно, если бы прямая A_1A_p имела бы третью общую точку с многоугольником, то она содержала бы его сторону (т. 103), но это невозможно так как по доказанному эта прямая разделяет стороны многоугольника A_1A_2 и A_1A_n. Значит, ломаная $A_1A_2\ldots A_p$, являющаяся частью исходного многоугольника, лежит по одну сторону от прямой A_1A_p. Так как исходный многоугольник лежит по одну сторону от каждой из прямых A_1A_2, A_2A_3,…, то этим свойством обладает и многоугольник $A_1A_2\ldots A_p$. Таким образом, многоугольник $A_1A_2\ldots A_p$ выпуклый. Аналогично доказывается выпуклость и другого многоугольника $A_pA_{p+1}\ldots A_nA_1$. Поскольку полупрямая A_1A_p разделяет стороны A_1A_2 и A_1A_n многоугольника, точки A_2 и A_n лежат в разных полуплоскостях относительно прямой A_1A_p. А это значит, что многоугольники $A_1A_2\ldots A_p$ и $A_pA_{p+1}\ldots A_nA_1$ лежат в разных полуплоскостях относительно прямой A_1A_p. Теорема доказана.

Определение 87. *Углом выпуклого многоугольника* при данной вершине называется угол, образованный лучами, исходящими из этой вершины и содержащими стороны многоугольника. *Внешним углом выпуклого многоугольника* при данной вершине называется угол, смежный углу многоугольника при этой вершине.

Теорема 105. Сумма углов выпуклого n-угольника равна $180°(n - 2)$. Сумма внешних углов выпуклого многоугольника, взятых по одному при каждой вершине, равна 360°.

Доказательство. Пусть P: $A_1A_2\ldots A_n$ – данный выпуклый многоугольник. Проведём диагональ A_1A_3. Она разделяет многоугольник P на треугольник $A_1A_2A_3$ и выпуклый (т. 104) многоугольник с n – 1 вершинами P_1: $A_1A_3\ldots A_n$. Углы при вершинах A_1 и A_3 многоугольника P равны сумме углов многоугольника P_1 и треугольника $A_1A_2A_3$ при этих вершинах. Отсюда следует, что сумма углов многоугольника P равна сумме углов многоугольника P_1 и треугольника $A_1A_2A_3$, то есть 180°. Далее таким же способом заключаем, что сумма углов многоугольника P_1 равна сумме углов многоугольника P_2: $A_1A_4\ldots A_n$ плюс 180°. А значит, сумма углов многоугольника P равна сумме углов многоугольника P_2 плюс 180°·2.



Продолжая таким же образом на (n – 3)-м шаге мы придём к треугольнику $A_1A_{n-1}A_n$. А сумма его углов равна 180°. В итоге сумма углов многоугольника P равна 180°(n – 3) + 180° = 180°(n – 2).

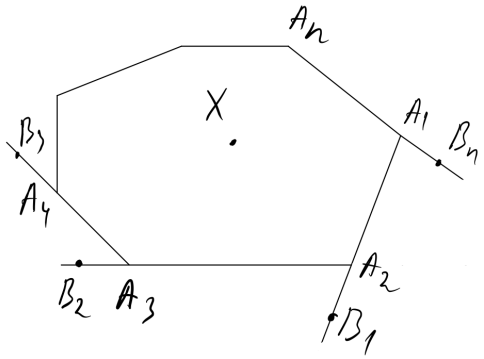
Сумма внутреннего угла многоугольника и смежного с ним внешнего равна 180°. Поэтому сумма всех внутренних и по одному соответствующему им внешнему углу равна 180°·n. Вычитая отсюда сумму внутренних углов многоугольника получаем, что сумма внешних углов, взятых по одному при каждой вершине, равна 180°n – 180°(n – 2) = 360°. Теорема доказана.

4. Пополненный многоугольник. Выпуклая ломаная

Определение 88. Пусть $A_1A_2\ldots A_n$ – выпуклый многоугольник. Каждая из прямых A_1A_2, A_2A_3, …, A_nA_1 разбивает плоскость на две полуплоскости. Выберем те из них, которые содержат многоугольник. Мы будем говорить, что точка X *лежит внутри* многоугольника, если она принадлежит каждой из выбранных полуплоскостей и не принадлежит многоугольнику.

Докажем, что все точки диагонали выпуклого многоугольника являются его внутренними точками. Действительно, все точки, скажем, диагонали A_1A_3 лежат по ту же сторону, что и точка A_1, относительно прямых A_2A_3 и A_3A_4, и по ту же сторону, что и точка A_3, относительно прямых A_1A_2, A_1A_n, $A_{n-1}A_n$ и так далее (т. 16).

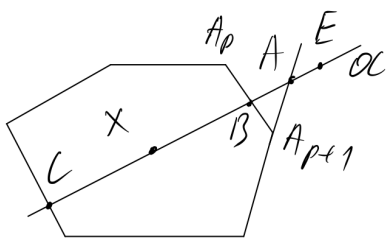
Лемма 12. Если точка X лежит внутри выпуклого многоугольника, а точка Y – нет, то отрезок XY пересекает многоугольник.
Доказательство. Допустим, что отрезок XY не пересекает многоугольник $A_1A_2\ldots A_n$ (¬). Если точка Y не лежит внутри многоугольника, то она не лежит в одной полуплоскости с точкой X относительно хотя бы одной из прямых, содержащих стороны многоугольника $A_1A_2\ldots A_n$. Пусть это прямая A_1A_2. Тогда отрезок XY пересекает прямую A_1A_2 в некоторой точке B_1, причем точка B_1 не принадлежит отрезку A_1A_2 и не совпадает с его концами. Пусть, например, B_1 принадлежит лучу,



дополнительному A_2A_1. Луч A_2A_1 лежит в одной полуплоскости с точкой X относительно прямой A_2A_3, а дополнительный ему луч лежит в другой полуплоскости. Значит, отрезок XB_1 пересекает прямую A_2A_3 в некоторой точке B_2, не принадлежащей отрезку A_2A_3.

Луч A_2A_3 лежит в одной полуплоскости с точкой X относительно прямой A_1A_2, а дополнительный ему луч в другой. Значит, точка B_2 не может принадлежать лучу, дополнительному A_2A_3, потому что для этого отрезок XB_2 должен был бы пересекать прямую A_1A_2, то есть точка B_1 должна была бы лежать между X и B_2. Значит, точка B_2 принадлежит лучу дополнительному A_3A_2. В свою очередь этот луч лежит по разные стороны с точкой X относительно прямой A_3A_4, то есть отрезок XB_2 должен пересекать её в некоторой точке B_3, не принадлежащей отрезку A_3A_4 и лучу дополнительному A_3A_4 и так далее. В итоге мы придём к тому, что отрезок XB_n должен пересекать прямую A_1A_2 в точке B_1. Но это невозможно, потому что точки B_1, B_2, … , B_n принадлежат полупрямой XY и из неравенств $XB_n < XB_{n-1} < \ldots < XB_1$ следует, что точка B_n принадлежит отрезку XB_1 ⊗. Случай, когда точка B_1 принадлежит лучу дополнительному A_1A_2 рассматривается аналогично. Таким образом, отрезок XY должен пересекать многоугольник $A_1A_2\ldots A_n$. Лемма доказана.

Лемма 13. Если прямая содержит внутреннюю точку выпуклого многоугольника, то она пересекает этот многоугольник ровно в двух точках, лежащих по разные стороны от внутренней точки многоугольника, и разделяет его на два выпуклых многоугольника, лежащих в разных полуплоскостях относительно этой прямой.
Доказательство. Пусть a – данная прямая, проходящая через внутреннюю точку X многоугольника. Поскольку прямые, содержащие стороны многоугольника, пересекаются, среди них найдётся прямая, не параллельная a. Тогда прямая a пересекает эту прямую в некоторой точке A, которая разбивает прямую a на два луча. Точки того из этих лучей, который не содержит точку X, заведомо не принадлежат внутренней области многоугольника (опр. 88). Значит, отрезок, соединяющий точку X с любой точкой этого луча, пересекает многоугольник в некоторой точке B (лемма 12).



Если точка B принадлежит стороне A_pA_{p+1} многоугольника, точки A_p и A_{p+1} лежат по разные стороны от прямой a. Значит, ломаная с концами в этих точках, являющаяся частью многоугольника, но не совпадающая с отрезком A_pA_{p+1}, пересекает прямую a в точке C (т. 102). Точка C является второй точкой пересечения многоугольника с прямой a.

Если точка B совпадает с некоторой вершиной A_p многоугольника, заметим, что полупрямые A_pX и A_pA_{p+1} отложены в одну полуплоскость относительно полупрямой A_pA_{p-1}. Поскольку полупрямая A_pA_{p+1} не может разделять точки A_{p-1} и X (опр. 88), то она не проходит между полупрямыми A_pA_{p-1} и A_pX, значит, полупрямая A_pX проходит между полупрямыми A_pA_{p-1} и A_pA_{p+1}, разделяя точки A_{p-1} и A_{p+1}. Отсюда снова заключаем, что ломаная с концами A_{p-1} и A_{p+1}, не содержащая звеньев $A_{p-1}A_p$ и A_pA_{p+1}, пересекает прямую A_pX, совпадающую с a, в точке C, которая является второй точкой пересечения многоугольника с прямой a.

Точка C не может принадлежать отрезку XB, поскольку в этом случае прямая, содержащая сторону многоугольника, которой принадлежит точка C (или сторону для которой точка C является концом) должна разделять точки X и B, что противоречит определению внутренней точки многоугольника. Следовательно, точка C лежит на луче дополнительном XB.

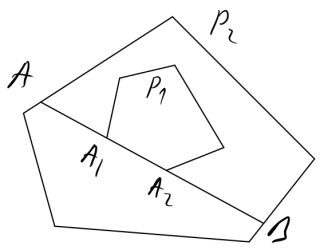
Прямая a не может пересекать многоугольник ещё в одной точке, кроме B и C, потому что в этом случае она должна содержать сторону этого многоугольника (т. 103), что невозможно так как по доказанному эта прямая разделяет точки многоугольника. Точки B и C разбивают многоугольник на две ломаные, каждая из которых лежит в одной полуплоскости относительно прямой a. Добавив к каждой из этих ломаных отрезок BC, получим два выпуклых многоугольника, на которые прямая a разделяет исходный. Лемма доказана.

Определение 89. Фигура, которая состоит из многоугольника и всех лежащих внутри него точек, называется *пополненным многоугольником*.

Определение 90. Пусть P_1 и P_2 – два выпуклых многоугольника, P'_1 и P'_2 – соответствующие им пополненные многоугольники. Мы будем говорить, что многоугольник P_1 *расположен внутри* многоугольника P_2, если каждая точка пополненного многоугольника P'_1 принадлежит пополненному многоугольнику P'_2.

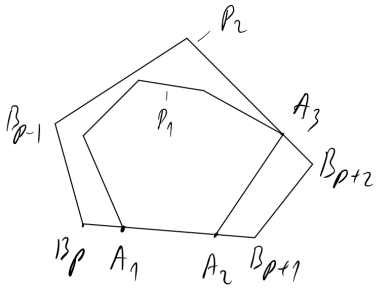
Определение 91. *Периметром* многоугольника называется сумма длин всех его сторон.

Теорема 106. Если выпуклый многоугольник P_1 расположен внутри выпуклого многоугольника P_2, то периметр P_1 не больше периметра P_2. Если многоугольник P_1 не совпадает с P_2, то его периметр меньше периметра P_2.
Доказательство. Проведём прямую a, содержащую сторону A_1A_2 многоугольника P_1. Многоугольник P_1 расположен по одну сторону от этой прямой. Если прямая a не содержит какую-либо сторону многоугольника P_2, то отрезок A_1A_2 содержит внутренние точки многоугольника P_2 (опр. 90). Тогда прямая a пересекает многоугольник P_2 в двух точках A и B и разделяет его на два выпуклых многоугольника (лемма 13). Пусть Q – тот из них, который лежит в одной

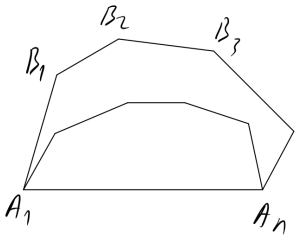


полуплоскости с P_1 относительно прямой a. Многоугольник Q содержит внутри многоугольник P_1 и имеет периметр меньший, чем периметр многоугольника P_2. Действительно, переход от многоугольника P_2 к Q связан с заменой ломаной отрезком AB, соединяющим её концы (т. 101).

Если прямая a содержит одну из сторон многоугольника P_2, то этот многоугольник лежит в той же полуплоскости, что и P_1 относительно a. Возможны два случая: когда сторона A_1A_2 совпадает со стороной B_pB_{p+1} многоугольника P_2, и когда хотя бы одна из точек A_1 или A_2 не совпадает с точками B_p и B_{p+1}. Если, например, вершина A_2 не совпадает ни с B_p, ни с B_{p+1}, то сторона A_2A_3 многоугольника P_1 не лежит на прямой, содержащей сторону $B_{p+1}B_{p+2}$ (или $B_{p-1}B_p$) многоугольника P_2, так как прямые a и $B_{p+1}B_{p+2}$ (или $B_{p-1}B_p$) не могут иметь двух точек пересечения A_2 и B_{p+1} (или A_2 и B_p). Также прямая A_2A_3 не может содержать никакую другую сторону многоугольника P_2, потому что у ломаной, составляющей многоугольник P_2, по определению не может быть самопересечения (в точке A_2). Значит, сторона A_2A_3 содержит внутренние точки многоугольника P_2 (опр. 90) и поэтому прямая A_2A_3 пересекает многоугольник P_2 в двух точках A и B (лемма 13), одна из которых совпадает с точкой A_2, а другая может совпадать с A_3. Аналогично предыдущему случаю, рассмотрим многоугольник Q, который состоит из отрезка AB и части многоугольника P_2, лежащей в полуплоскости многоугольника P_1 относительно прямой A_2A_3. Многоугольник Q содержит внутри многоугольник P_1 и имеет периметр меньший, чем периметр многоугольника P_2.



Проделав такое построение с каждой стороной многоугольника P_1, мы получим, в конце концов из многоугольника P_2 многоугольник P_1. Отсюда следует, что если многоугольник P_1 не совпадает с P_2, то он имеет периметр меньший периметра P_2. Теорема доказана.



<u>Определение 92</u>. Ломаная γ: $A_1A_2\ldots A_n$ называется *выпуклой*, если существует и является выпуклым многоугольник P: $A_1A_2\ldots A_n$. Ломаная γ_1: $A_1B_2B_3\ldots A_n$ называется *объемлющей* для выпуклой ломаной γ, если существует выпуклый многоугольник P_1: $A_1B_2B_3\ldots A_n$ и многоугольник P расположен внутри P_1.

<u>Теорема 107</u>. Ломаная γ_1, объемлющая выпуклую ломаную γ, имеет длину не меньшую, чем γ. Если ломаные не совпадают, то γ_1 имеет большую длину.

Доказательство. Следует из теоремы 106 в применении к многоугольникам P и P_1, образуемыми ломаными γ и γ_1. Теорема доказана.

5. Правильные многоугольники

Определение 93. Выпуклый многоугольник называется *правильным,* если у него стороны равны и углы равны.

Так как сумма внешних углов выпуклого многоугольника равна 360°, а сумма внутренних углов равна 180°(n – 2), то внешние углы правильного n-угольника равны $\frac{360^\circ}{n}$, а внутренние равны $\frac{180^\circ(n-2)}{n}$.

Правильные выпуклые n-угольники с равными сторонами равны, то есть многоугольники совмещаются движением.

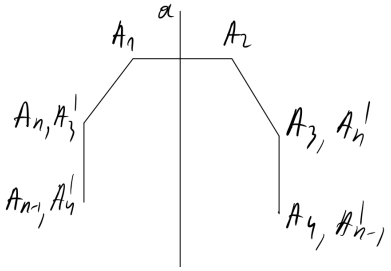
Пусть P_1: $A_1A_2\ldots A_n$ и P_2: $B_1B_2\ldots B_n$ – данные правильные n-угольники. Совместим движением отрезок B_1B_2 с отрезком A_1A_2 так, чтобы многоугольник P_2 перешёл в многоугольник по ту же сторону от прямой A_1A_2, что многоугольник P_1. Такое движение можно получить, например, следующим образом.

Сначала зеркальным отражением относительно серединного перпендикуляра к отрезку A_1B_1 совместим точку B_1 с A_1. При этом точка B_2 перейдёт в некоторую точку B'_2. Теперь зеркальным отражением относительно серединного перпендикуляра к отрезку $A_2B'_2$ совместим точку B'_2 с A_2. Если многоугольники P_1 и P'_2 (в который перешёл многоугольник P_2) расположены в разных полуплоскостях относительно прямой A_1A_2, то применим ещё зеркальное отражение относительно этой прямой.

Утверждаем, что многоугольники P_1 и P_2 после указанного совмещения их сторон B_1B_2 и A_1A_2 полностью совмещаются. Действительно, так как углы $A_1A_2A_3$ и $B_1B_2B_3$ равны, то полупрямые A_2A_3 и B_2B_3 совпадают. Так как отрезки A_2A_3 и B_2B_3 равны, то точки B_3 и A_3 совпадают. Оба многоугольника расположены в одной полуплоскости относительно прямой A_2A_3, именно в полуплоскости, где лежит их общая вершина A_1. После этого таким же способом заключаем о совпадении вершин B_4 и A_4, B_5 и A_5 и так далее. То есть многоугольники P_1 и P_2 совмещены.

Теорема 108. Перпендикуляры, проведённые через середины сторон правильного многоугольника, и биссектрисы его углов являются осями симметрии.

Доказательство. Пусть a – серединный перпендикуляр к стороне A_1A_2 правильного многоугольника P: $A_1A_2\ldots A_n$. Симметрия относительно прямой a переводит многоугольник P в многоугольник P': $A_2A_1A'_3A'_4\ldots A'_n$. Оба многоугольника, P и P', расположены по одну сторону от прямой A_1A_2 (так как при движении точки смещались по прямым параллельным A_1A_2). Углы $A_1A_2A_3$ и $A_1A_2A'_n$ равны,



поэтому полупрямые A_2A_3 и $A_2A'_n$ совпадают. Так как отрезки A_2A_3 и $A_2A'_n$ равны, то точки A_3 и A'_n совпадают. Оба многоугольника лежат в одной полуплоскости относительно прямой A_2A_3 (в полуплоскости точки A_1), так что аналогично заключаем о совпадении вершин A_4 и A'_{n-1} и так далее. А это значит, что симметрия относительно прямой *a* переводит многоугольник *P* в себя, то есть прямая *a* является осью симметрии.

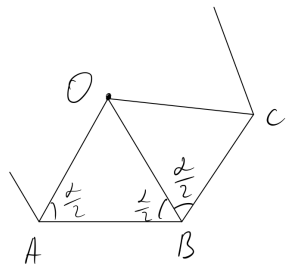
Если прямая *a* является биссектрисой угла A_2 многоугольника *P*, то она проходит через середину отрезка A_1A_3 перпендикулярно к нему. Значит, при симметрии относительно прямой *a*, многоугольник *P* переходит в многоугольник *P'*: $A_3A_2A_1A'_4\ldots A'_n$. Оба многоугольника лежат в одной полуплоскости относительно прямой A_2A_3 (в полуплоскости точки A_1), так что аналогично предыдущему заключаем о совпадении точек A_4 и A'_n и так далее. Теорема доказана.

6. Вписанные и описанные многоугольники

Определение 94. Многоугольник называется *вписанным* в окружность, если все его вершины лежат на некоторой окружности. Многоугольник называется *описанным* около окружности, если все его стороны касаются некоторой окружности.

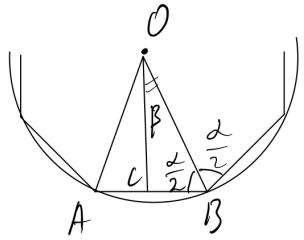
Теорема 109. Правильный выпуклый многоугольник является вписанным в окружность и описанным около окружности.

Доказательство. Пусть *A* и *B* – две соседние вершины многоугольника. Проведём биссектрисы углов многоугольника из вершин *A* и *B*. Пусть *O* – их точка пересечения. Треугольник *AOB* равнобедренный с основанием *AB* и углами при основании, равными половине угла многоугольника *α*. Соединим точку *O* с вершиной *C*, соседней с *B*. Треугольники *ABO* и *CBO* равны по первому признаку равенства треугольников. У них сторона *OB* общая, стороны *AB* и *BC* равны как стороны правильного многоугольника, а углы при вершине *B* равны *α*/2. Из равенства треугольников следует, что треугольник *OBC* равнобедренный с углом при вершине *C*, равным *α*/2. А значит, *CO* есть биссектриса угла *C* многоугольника.



Теперь соединяем точку *O* с вершиной *D*, соседней с *C*, и доказываем, что треугольник *COD* равнобедренный и *DO* – биссектриса угла *D* многоугольника. И так далее. В итоге получается, что каждый треугольник, у которого одной стороной является сторона многоугольника, а противолежащей вершиной – точка *O*, является равнобедренным. Боковые стороны всех этих треугольников равны. Отсюда следует, что все вершины многоугольника находятся на окружности с центром *O* и радиусом, равным боковым сторонам треугольников, а все стороны многоугольника касаются окружности с центром *O* и радиусом, равным высотам треугольников, проведённым из вершины *O*. Теорема доказана.

Найдём радиус R описанной окружности и радиус r вписанной окружности для правильного многоугольника со стороной a и числом сторон n. Имеем:



$$\beta = 90^\circ - \frac{\alpha}{2} = 90^\circ - \frac{(n-2)180^\circ}{2n} = \frac{180^\circ}{n};$$

$$R = OB = \frac{CB}{\sin\beta} = \frac{a}{2\sin\frac{180^\circ}{n}};\ r = OC = \frac{CB}{tg\beta} = \frac{a}{2tg\frac{180^\circ}{n}}.$$

Теорема 110. Правильные выпуклые многоугольники с одинаковым числом сторон подобны.

Доказательство. Пусть P: $A_1A_2\ldots A_n$ и Q: $B_1B_2\ldots B_n$ – данные правильные многоугольники. Обозначим через $k = \frac{A_1A_2}{B_1B_2}$ отношение их сторон. Подвергнем многоугольник Q преобразованию гомотетии относительно центра описанной окружности с коэффициентом k. Тогда получим правильный многоугольник Q': $B'_1B'_2\ldots B'_n$ с теми же сторонами, что и у P. Многоугольник Q' равен многоугольнику P, следовательно, совмещается с ним движением. Гомотетия и движение, выполненные последовательно, дают преобразование подобия. Таким образом, многоугольник Q переводится в P преобразованием подобия. А это значит, что многоугольники P и Q подобны. Теорема доказана.

Докажем, что *в окружность можно вписать правильный многоугольник с любым числом сторон n*. Пусть OA_1 – некоторый радиус данной окружности. Отложим от него угол A_1OA_2, равный $\frac{360^\circ}{n}$, затем от радиуса OA_2 отложим угол A_2OA_3, также равный $\frac{360^\circ}{n}$, и так далее. В результате получим вписанный многоугольник $A_1A_2\ldots A_n$. Многоугольник $A_1A_2\ldots A_n$ является выпуклым, поскольку он лежит в полуплоскости центра окружности относительно прямой, содержащей любую из его сторон. Из равенства равнобедренных треугольников A_1OA_2, A_2OA_3 … следует, что стороны и углы построенного многоугольника равны, то есть он является правильным.

§16. Площадь многоугольников

1. Понятие площади

Определение 95. *Кругом* с центром O и радиусом R называется фигура, которая состоит из всех точек плоскости, находящихся на расстоянии не большем R от точки O. Окружность радиуса R с центром O называется *ограничивающей круг окружностью.*

Определение 96. Точка называется *внутренней точкой* фигуры F, если существует круг с центром в этой точке, все точки которого принадлежат фигуре F. Точка называется *внешней* по отношению к F, если существует круг с центром в этой точке, не имеющий с F общих точек. Точка называется *граничной* по отношению к

F, если всякий круг с центром в этой точке содержит по крайней мере одну точку, принадлежащую F, и по крайней мере одну точку, не принадлежащую F. Фигура, состоящая из всех внутренних точек фигуры F называется *внутренней частью* фигуры F. Фигура, состоящая из всех граничных точек фигуры F, называется *границей* F.

Из определения следует, что любая внутренняя точка фигуры принадлежит этой фигуре, а любая внешняя точка – не принадлежит. Граничные точки могут как принадлежать фигуре, так и не принадлежать ей.

Покажем, что внутренние точки выпуклого многоугольника в смысле определения 88 являются внутренними точками соответствующего пополненного многоугольника в смысле определения 96, и наоборот.

Действительно, если M – внутренняя точка выпуклого многоугольника P по определению 88, то построим круг с центром M и радиусом меньшим каждого из расстояний от точки M до прямых, содержащих стороны многоугольника. Все точки этого круга будут принадлежать пополненному многоугольнику P'. Значит, точка M является внутренней точкой пополненного многоугольника P' в смысле определения 96. Обратно, если M – внутренняя точка пополненного выпуклого многоугольника P' по определению 96, то она не может принадлежать многоугольнику P, а значит должна являться его внутренней точкой по определению пополненного многоугольника.

В дальнейшем при доказательствах свойств многоугольников в зависимости от удобства мы будем пользоваться как определением 88, так и определением 96. Как мы показали, эти определения эквивалентны с поправкой на то, что в определении 96 подразумевается пополненный многоугольник, а в определении 88 соответствующий ему обычный.

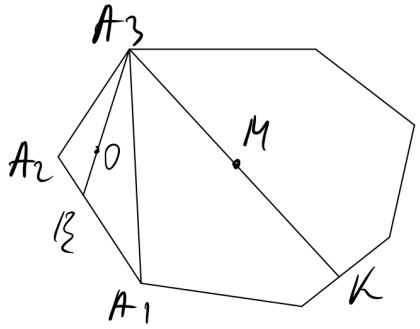
<u>Определение 97</u>. Будем говорить, что фигура F *разбита* на фигуры F_1, F_2, …, F_n, если:

1) фигуры F_1, F_2, …, F_n не имеют попарно общих внутренних точек;
2) внутренние точки фигур F_1, F_2, …, F_n являются внутренними точками F;
3) всякая внутренняя точка F является внутренней точкой одной из фигур F_1, F_2, …, F_n, либо принадлежит граничным точкам фигур F_1, F_2, …, F_n.

<u>Определение 98</u>. Фигуру, допускающую разбиение на пополненные треугольники, называют *многоугольной фигурой*.

Докажем, что *пополненный выпуклый многоугольник $A_1A_2\ldots A_n$ является многоугольной фигурой.* Диагональ A_1A_3 разделяет многоугольник на треугольник $A_1A_2A_3$ и выпуклый многоугольник $A_1A_3A_4\ldots A_n$, лежащие в разных полуплоскостях

относительно прямой A_1A_3 (т. 104). Поэтому треугольник $A_1A_2A_3$ и многоугольник $A_1A_3A_4\ldots A_n$ не могут иметь общих внутренних точек.



Пусть O внутренняя точка треугольника $A_1A_2A_3$, тогда полупрямая A_3O проходит между полупрямыми A_3A_2 и A_3A_1, а значит, пересекает отрезок A_1A_2 в некоторой точке E. Следовательно, отрезок A_3E лежит в полуплоскости многоугольника относительно прямых A_3A_4, A_4A_5 и так далее (т. 10 и 16). Значит, точка O является внутренней точкой многоугольника $A_1A_2\ldots A_n$. Если M – внутренняя точка многоугольника $A_1A_3A_4\ldots A_n$, то она лежит на отрезке A_3K, где K – точка многоугольника (лемма 13). Тогда, аналогично предыдущему рассуждению, заключаем, что отрезок A_3K лежит в полуплоскости точки K относительно прямых A_3A_2 и A_2A_1, а значит, все его точки являются внутренними точками многоугольника $A_1A_2\ldots A_n$.

Всякая внутренняя точка многоугольника $A_1A_2\ldots A_n$ лежит либо с одной, либо с другой стороны от прямой A_1A_3 и, таким образом, является внутренней точкой либо треугольника $A_1A_2A_3$, либо многоугольника $A_1A_3A_4\ldots A_n$ (либо принадлежит отрезку A_1A_3).

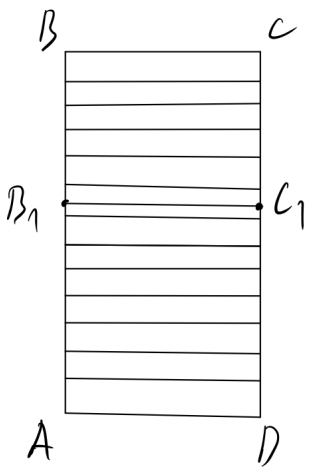
Значит, выполняются условия определения 97 для разбиения многоугольника $A_1A_2\ldots A_n$ на треугольник $A_1A_2A_3$ и многоугольник $A_1A_3A_4\ldots A_n$. Теперь, разделяя многоугольник $A_1A_3A_4\ldots A_n$ диагональю A_1A_4, получим его разбиение на треугольник $A_1A_3A_4$ и ещё один выпуклый многоугольник, и так далее. В итоге, получаем, что исходный многоугольник $A_1A_2\ldots A_n$ разбивается на треугольники $A_1A_2A_3$, $A_1A_3A_4$, …, $A_1A_{n-1}A_n$.

<u>Определение 99</u>. *Площадь многоугольной фигуры* это положительная величина, численное значение которой обладает следующими свойствами:

1) равные фигуры имеют равные площади;
2) если фигура разбита на многоугольные фигуры, то площадь данной фигуры равна сумме площадей фигур её разбиения;
3) площадь квадрата со стороной, равной единице, равна единице.

2. Площадь прямоугольника

Найдём как должна вычисляться площадь прямоугольника со сторонами a и b (а затем и площади параллелограмма, треугольника и трапеции), при условии, что площадь существует. Само существование площади для любой многоугольной фигуры будет доказано в пункте 4.



Сначала докажем, что площади двух прямоугольников с равными основаниями, относятся как их неравные стороны. Пусть *ABCD* и *MNPK* – два прямоугольника с равными сторонами *AD* = *MK*. Пусть S_1 и S_2 – их площади. Для определённости будем считать, что *MN* < *AB*. Отложим на полупрямой *AB* отрезок $AB_1 = MN$, а на полупрямой *DC* отрезок $DC_1 = KP$. Получим прямоугольник AB_1C_1D, равный *MNPK*. Докажем, что $\frac{S_2}{S_1} = \frac{AB_1}{AB} = \frac{MN}{AB}$. Так как $AB > AB_1$, точка B_1 лежит между точками *A* и *B*. Разобьём сторону *AB* прямоугольника на большое число *n* отрезков, длина каждого из которых равна $\frac{AB}{n}$, так, чтобы отношение $AB_1 : \frac{AB}{n}$ не было целым. Пусть *m* – целое от деления AB_1 на $\frac{AB}{n}$, тогда

$$\frac{AB}{n} \cdot m < AB_1 < \frac{AB}{n} \cdot (m+1).$$

Отсюда, разделив на *AB*, получим

$$\frac{m}{n} < \frac{AB_1}{AB} < \frac{m}{n} + \frac{1}{n}.$$

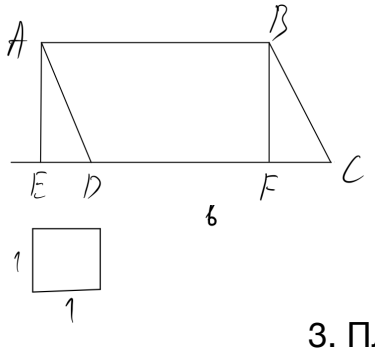
Проведём через концы отрезков, отложенных на стороне *AB,* прямые, параллельные *AD*. Они пересекут прямую *CD* в точках, порядок и расстояние между которыми будут такими же, как порядок и расстояние между точками, взятыми на отрезке *AB* (лемма 6, т. 53). Таким образом, получим разбиение прямоугольника *ABCD* на *n* равных прямоугольников. Площадь прямоугольника *ABCD* равна сумме площадей этих прямоугольников, значит, каждый из них имеет площадь $\frac{S_1}{n}$. Прямоугольник AB_1C_1D целиком содержит первые *m* из этих прямоугольников, плюс ещё один меньший прямоугольник, а также содержится в прямоугольнике, составленном из *m* + 1 прямоугольников площадью $\frac{S_1}{n}$. Поэтому

$$\frac{S_1}{n} \cdot m < S_2 < \frac{S_1}{n} \cdot (m+1);$$

$$\frac{m}{n} < \frac{S_2}{S_1} < \frac{m}{n} + \frac{1}{n}.$$

Таким образом, оба числа $\frac{AB_1}{AB}$ и $\frac{S_2}{S_1}$ заключены между $\frac{m}{n}$ и $\frac{m}{n} + \frac{1}{n}$. Поэтому они отличаются не более чем на $\frac{1}{n}$. А так как *n* можно взять сколь угодно большим, то $\frac{AB_1}{AB}$ и $\frac{S_2}{S_1}$ отличаются сколь угодно мало. Это возможно только при $\frac{AB_1}{AB} = \frac{S_2}{S_1}$.

Возьмём теперь квадрат со стороной, равной 1, прямоугольник со сторонами, равными 1 и *a* и прямоугольник со сторонами *a* и *b*. Сравнивая их площади, по



доказанному имеем $\frac{S_3}{1} = \frac{a}{1}$ и $\frac{S}{S_3} = \frac{b}{1}$. Перемножая эти равенства почленно получим, что *площадь прямоугольника со сторонами a и b вычисляется по формуле*

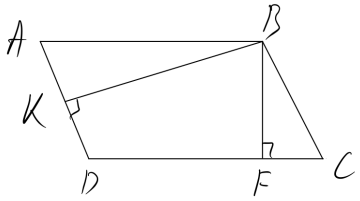
$$S = ab.$$

3. Площади параллелограмма, треугольника и трапеции

Определение 100. Перпендикуляр, опущенный из вершины параллелограмма к прямой, содержащей сторону параллелограмма, называется *высотой параллелограмма*, соответствующей этой стороне. Также высотой параллелограмма называется длина этого перпендикуляра.

Найдём площадь параллелограмма. Пусть *ABCD* – данный параллелограмм. Если он не является прямоугольником, то один из его углов, *A* или *B*, острый. Пусть для определённости, угол *A* острый. Опустим перпендикуляр *AE* на прямую *CD*. Точка *D* лежит между точками *E* и *C* (иначе в прямоугольном треугольнике *ADE* угол *D* был бы тупым, что невозможно). Поэтому треугольник *ADE* и параллелограмм *ABCD* лежат в разных полуплоскостях относительно прямой *AD*. Значит, трапеция *ABCE* разбита на треугольник *ADE* и параллелограмм *ABCD*, так что площадь трапеции равна сумме площадей этого треугольника и параллелограмма.

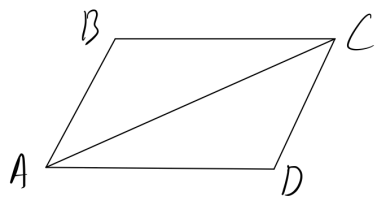
Опустим перпендикуляр *BF* на прямую *CD*. Точка *F* лежит между точками *C* и *E*, поэтому аналогично предыдущему случаю заключаем, что площадь трапеции *ABCE* равна сумме площадей прямоугольника *ABFE* и треугольника *BCF*. Прямоугольные треугольники *ADE* и *BCF* равны, а значит, имеют равные площади. Отсюда следует, что площадь параллелограмма *ABCD* равна площади прямоугольника *ABFE*, то есть равна $AB \cdot BF$ или $DC \cdot BF$ – произведению стороны параллелограмма на соответствующую высоту.



Покажем, что произведение стороны параллелограмма на соответствующую высоту не зависит от выбора высоты. Опустим перпендикуляр *BK* на прямую *AD*. Прямоугольные треугольники *BAK* и *BCF* подобны по двум углам, следовательно, $\frac{AB}{BC} = \frac{BK}{BF}$, отсюда $BK \cdot BC = AB \cdot BF$.

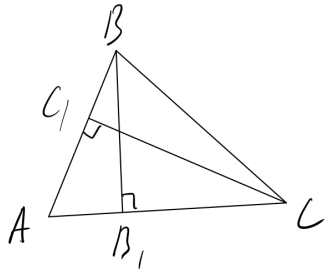
Итак, *площадь параллелограмма равна произведению его стороны на высоту, соответствующую этой стороне.*

Найдём площадь треугольника. Пусть *ABC* – данный треугольник. Проведём через точки *C* и *A* прямые, параллельные сторонам треугольника и таким образом, дополним этот треугольник до параллелограмма *ABCD.* Площадь параллелограмма



равна сумме площадей треугольников *ABC* и *CDA*. Так как эти треугольники равны, то площадь параллелограмма равна удвоенной площади треугольника *ABC*. Высота параллелограмма, соответствующая стороне *AB*, равна высоте треугольника *ABC*, проведённой к стороне *AB*. Значит, площадь треугольника *ABC* равна половине произведения высоты треугольника, проведённой к стороне *AB,* на длину стороны *AB*.

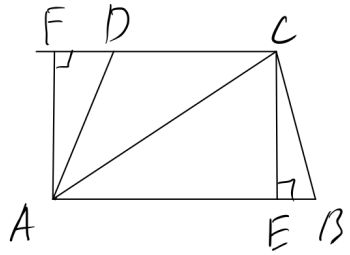
Покажем, что произведение высоты треугольника на соответствующую сторону не зависит от выбора высоты. Необходимо рассмотреть три случая: когда треугольник остроугольный, прямоугольный и тупоугольный. Пусть треугольник *ABC* – остроугольный. Проведём высоты BB_1 и CC_1. В прямоугольных треугольниках ACC_1 и ABB_1 угол *A* общий, следовательно, они подобны. Тогда $\frac{AC}{AB} = \frac{CC_1}{BB_1}$ и $AC \cdot BB_1 = AB \cdot CC_1$. Для прямоугольного и тупоугольного треугольников доказательство аналогично.



Итак, *площадь треугольника равна половине произведения его стороны на высоту, проведённую к этой стороне.*

<u>Определение 101</u>. Перпендикуляр, опущенный из вершины трапеции к прямой, содержащей основание трапеции, называется *высотой трапеции*. Также высотой трапеции называется длина этого перпендикуляра.

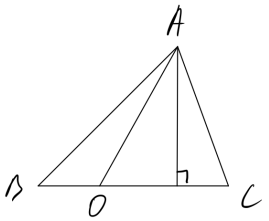
Найдём площадь трапеции. Пусть *ABCD* – данная трапеция. Проведя диагональ *AC,* получим разбиение трапеции на два треугольника: *ABC* и *CDA*. Следовательно, площадь трапеции равна сумме площадей этих треугольников. Площадь треугольника *ABC* равна $\frac{1}{2}AB \cdot CE$, площадь треугольника *ACD* равна $\frac{1}{2}DC \cdot AF$. Высоты *CE* и *AF* этих треугольников являются также высотами трапеции, а их длины равны расстоянию между параллельными прямыми *AB* и *CD*.



Следовательно, *площадь трапеции равна произведению полусуммы её оснований на высоту.*

4. Площадь многоугольной фигуры

Из определения площади следует, что площадь треугольника должна быть равна половине произведения его стороны на высоту, проведённую к этой стороне. Тогда

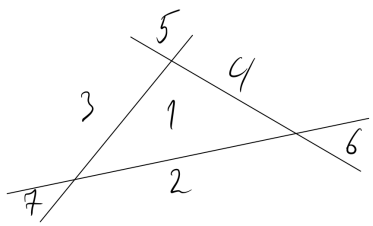


для любой многоугольной фигуры площадь может быть найдена как сумма площадей треугольников её разбиения. Для того, чтобы этот способ определения площади был корректен, требуется доказать, что при этом будут выполняться свойства площади из определения 99 и площадь многоугольной фигуры не будет зависеть от способа разбиения её на треугольники. Поэтому в доказательствах данного пункта мы будем опираться только на определение площади треугольника как половины произведения его стороны на соответствующую высоту, не пользуясь свойствами из определения 99 (ведь их выполнение мы и хотим доказать).

Лемма 14. Если точка *O* принадлежит стороне *BC* треугольника *ABC*, то площадь треугольника *ABC* равна сумме площадей треугольников *AOB* и *AOC*.
Доказательство. Треугольники *AOB* и *AOC* имеют одну и ту же высоту совпадающую с высотой треугольника *ABC*, а сумма их оснований *OB* и *OC* равна стороне *BC*. Таким образом, сумма площадей треугольников *AOB* и *AOC* равна площади треугольника *ABC*. Лемма доказана.

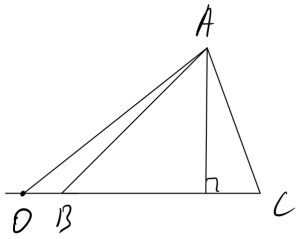
Пусть даны произвольный треугольник *ABC* и произвольная точка *O*. Соединим точку *O* с вершинами треугольника *ABC*, получим три треугольника *OAB, OBC* и *OAC*. Можно сказать, что каждый из этих треугольников получается из треугольника *ABC* заменой одной из его вершин на точку *O*. Мы будем называть треугольник с вершиной *O* *положительным*, если точка *O* лежит по одну сторону с вершиной, которую она заменила в треугольнике *ABC*, относительно прямой, соединяющей две другие вершины, и *отрицательным*, если по разные.

Лемма 15. Если в плоскости треугольника выбрать какую-либо точку *O* и соединить её с тремя вершинами данного треугольника, то разность между суммой площадей положительных и суммой площадей отрицательных треугольников равняется площади данного треугольника.
Доказательство. Прямые, содержащие стороны треугольника, разбивают плоскость на семь частей. В зависимости от того какой из этих частей или их границ принадлежит точка *O*, будем различать пять случаев.



1) Точка *O* лежит на одной из сторон треугольника. Пусть точка *O* лежит на стороне *BC* треугольника *ABC*. Тогда треугольника *OBC* не существует, а сумма площадей треугольников *OAB* и *OAC* равна площади треугольника *ABC* (лемма 14).

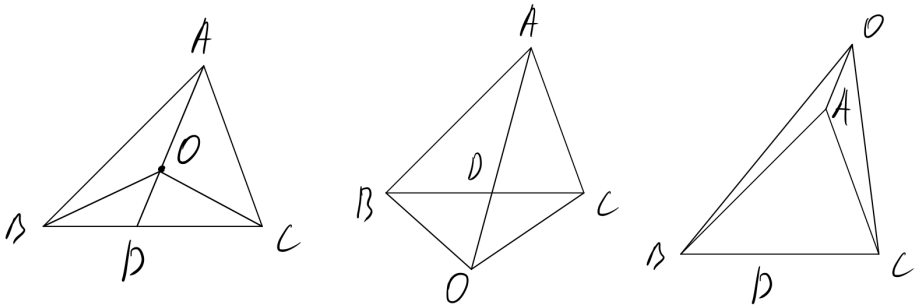
2) Точка *O* лежит на продолжении одной из сторон треугольника. Пусть точка *O* лежит на продолжении стороны *BC* треугольника *ABC* за точку *B*. Тогда



треугольника *OBC* не существует, а сумма площадей треугольников *OAB* и *ABC* равна площади треугольника *OAC*. Значит, разность площадей треугольников *OAC* и *OAB* равна площади треугольника *ABC*.

3) Точка *O* лежит внутри треугольника. Продолжим отрезок *AO* до пересечения в точке *D* со стороной *BC*. Применяя лемму 14 к треугольникам *ABC, ABD* и *ACD*, *OBC* получим:

$$S_{ABC} = S_{ABD} + S_{ACD};$$
$$S_{ABD} = S_{OAB} + S_{OBD};$$
$$S_{ACD} = S_{OAC} + S_{OCD};$$
$$S_{OBC} = S_{OBD} + S_{OCD}.$$



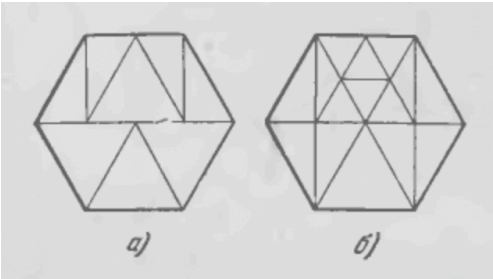
Отсюда получаем, что $S_{ABC} = S_{OAB} + S_{OAC} + S_{OBC}$.

4) Точка *O* лежит вне данного треугольника, но внутри одного из его углов, например, *A*. Обозначим *D* точку пересечения прямой *OA* со стороной *BC*. Применяя лемму 14 к треугольникам *ABC, OAB, OAC, OBC*, получим:

$$S_{ABC} = S_{ABD} + S_{ACD};$$
$$S_{OAB} = S_{ABD} + S_{OBD};$$
$$S_{OAC} = S_{ACD} + S_{OCD};$$
$$S_{OBC} = S_{OBD} + S_{ODC}.$$

Отсюда получаем, что $S_{ABC} = S_{OAB} + S_{OAC} - S_{OBC}$.

5) Точка *O* лежит внутри угла, вертикального одному из углов треугольника *ABC*, например, углу *A*. Тогда точка *A* лежит внутри треугольника *OBC*, и по доказанному в пункте 3 получаем: $S_{OBC} = S_{ABC} + S_{OAB} + S_{OAC}$, откуда $S_{ABC} = S_{OBC} - S_{OAB} - S_{OAC}$. Лемма доказана.

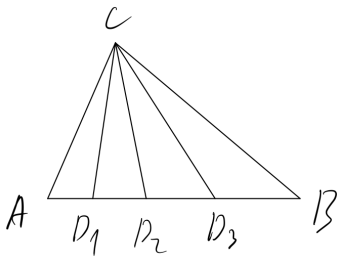


Для следующего доказательства нам понадобятся такие разбиения многоугольных фигур на треугольники, при которых любые два треугольника разбиения либо не имеют общих точек, либо имеют общую вершину, либо общую сторону. Такое разбиение будем называть *правильным*. На рисунке правильное разбиение

показано справа, а неправильное слева. Для того, чтобы разбиение было правильным необходимо и достаточно, чтобы общая точка двух треугольников, являющаяся вершиной одного из них, была вершиной и другого. Треугольники неправильного разбиения можно дополнительно разбить таким образом, чтобы оно стало правильным. Пусть, например, общая для двух треугольников разбиения точка *A* – вершина только одного из них. Тогда, она лежит на одной из сторон второго треугольника. Проведём через точку *A* и противолежащую этой стороне вершину *T* отрезок *AT*. Он разобьёт второй треугольник на два новых треугольника таким образом, что для первого треугольника и двух образовавшихся точка *A* является вершиной. Проделав эту операцию со всеми вершинами треугольников разбиения, принадлежащих сторонам других треугольников, мы получим правильное разбиение фигуры на треугольники.

Теорема 110. Каждой многоугольной фигуре можно единственным образом поставить в соответствие её площадь.
Доказательство. Поставим в соответствие каждому треугольнику площадь, вычисляемую как половина произведения его стороны на высоту, проведённую к этой стороне. Для любой многоугольной фигуры определим площадь как сумму площадей треугольников её разбиения. Покажем, что при этом будут выполняться свойства определения 99 и площадь не будет зависеть от способа разбиения фигуры на треугольники.

Докажем, что при разбиении треугольника на меньшие треугольники его площадь равна сумме площадей треугольников этого разбиения.

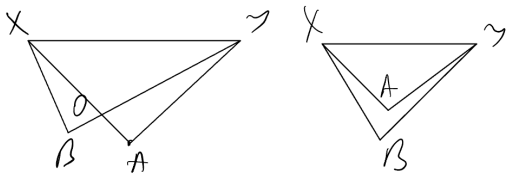


Сначала рассмотрим разбиение треугольника *ABC* на треугольники CAD_1, CD_1D_2, CD_2D_3, … у которых точки D_1, D_2, D_3,… лежат на стороне *AB* треугольника *ABC*. Все треугольники разбиения имеют общую высоту *h*, проведённую из их общей вершины *C*. Высота *h* также является высотой треугольника *ABC*. Найдём сумму площадей треугольников разбиения:

$$\frac{AD_1 \cdot h}{2} + \frac{D_1D_2 \cdot h}{2} + \frac{D_2D_3 \cdot h}{2} + \ldots = \frac{(AD_1 + D_1D_2 + D_2D_3 + \ldots) \cdot h}{2}.$$

Так как $AD_1 + D_1D_2 + D_2D_3 + \ldots = AB$, то сумма площадей треугольников нашего разбиения равна $\frac{AB \cdot h}{2}$, то есть площади треугольника *ABC*.

Рассмотрим теперь правильное разбиение треугольника *ABC* на меньшие треугольники. Заметим, что два треугольника такого разбиения, имеющие общую сторону *XY*, не могут располагаться в одной полуплоскости относительно *XY*, поскольку тогда они будут иметь общие внутренние точки. Действительно, пусть треугольники *AXY* и *BXY* лежат в одной полуплоскости и,



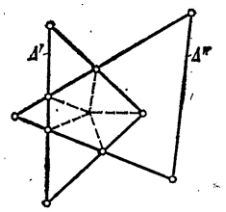
например, полупрямая *XA* проходит между сторонами угла *BXY*, а полупрямая *YA* проходит между сторонами угла *BYX*. Тогда внутренние точки треугольника *AXY* являются внутренними и для треугольника *BXY*, что невозможно (опр. 97). В случае, когда полупрямая *XA* проходит между сторонами угла *BXY*, а полупрямая *YB* проходит между сторонами угла *XYA,* отрезки *XA* и *YB* пересекаются в точке *O*, что противоречит условию разбиения.

Пусть *PQR* – какой-нибудь из треугольников разбиения. По лемме 15 площадь треугольника *PQR* можно представить в виде алгебраической суммы площадей трёх треугольников *APQ, AQR, ARP.* Представив таким образом площадь каждого треугольника разбиения, сложим площади всех треугольников разбиения. Мы получим сумму площадей треугольников *AXY*, где *XY* – сторона треугольника разбиения. Если отрезок *XY* лежит внутри треугольника *ABC*, то площадь треугольника *AXY* входит в нашу сумму дважды, потому что *XY* является стороной двух треугольников разбиения. Так как эти треугольники расположены по разные стороны от прямой *XY*, то один из этих треугольников будет положительным, а другой отрицательным. Таким образом, эти слагаемые при вычислении площади треугольника *ABC*, взаимно уничтожаются.

Если отрезок *XY* лежит на стороне *BC* треугольника *ABC*, то площадь треугольника *AXY* входит в нашу сумму только один раз, причём со знаком плюс. Если же сторона *XY* лежит на *AB* или *AC*, то треугольника *AXY* не существует. В итоге сумма площадей треугольников нашего разбиения равна сумме площадей треугольников *AXY* со сторонами *XY* на стороне *BC* треугольника *ABC*. Но было доказано ранее, что эта сумма равна площади треугольника *ABC*. Итак, площадь треугольника *ABC* равна сумме площадей треугольников любого разбиения.

Пусть теперь многоугольная фигура *F* разбита в одном случае на треугольники $\Delta'_1, \Delta'_2, \Delta'_3, \ldots$, во втором случае – на треугольники $\Delta''_1, \Delta''_2, \Delta''_3, \ldots$. Докажем, что суммы площадей треугольников первого и второго разбиения одинаковы.

Прямая может пересекать стороны треугольника только в двух точках (т. 7),



поэтому треугольники первого и второго разбиения, взятые вместе, производят разбиение фигуры *F* на выпуклые многоугольники: треугольники, четырёхугольники, пятиугольники и шестиугольники. Каждый такой многоугольник ограничивает собой общую внутреннюю часть одного треугольника первого разбиения и одного треугольника второго разбиения. На рисунке показан один такой пятиугольник. Мы разобьём эти многоугольники на треугольники $\Delta'''_1, \Delta'''_2, \Delta'''_3, \ldots$, причём сделаем это так, чтобы получить правильное разбиение каждого из треугольников Δ'_k и Δ''_k.

По доказанному площадь каждого треугольника Δ'_k первого разбиения фигуры *F* равна сумме площадей треугольников Δ'''_k, которые в него входят. Точно также площадь каждого треугольника Δ''_k второго разбиения представляется в виде суммы площадей треугольников Δ'''_k. Поэтому суммы площадей треугольников и первого и второго разбиения фигуры *F* равны сумме площадей треугольников Δ'''_k. Таким образом, суммы площадей треугольников первого и второго разбиения равны, то есть площадь фигуры *F* не зависит от способа разбиения её на треугольники.

Докажем теперь, что определяемая таким способом площадь действительно обладает свойствами из определения 99. Первое свойство площади следует из равенства площадей равных треугольников (у них соответствующие стороны равны и опущенные на них высоты тоже равны).

Пусть фигура *G* разбита на фигуры $G_1, G_2, G_3, \ldots$. Пусть фигура G_1 разбита на треугольники Δ'_k, фигура G_2 – на треугольники Δ''_k, фигура G_3 – на треугольники Δ'''_k, и так далее. При этом получается разбиение фигуры *G* на треугольники Δ'_k, Δ''_k, Δ'''_k … . Площадь фигуры G_1 равна сумме площадей треугольников Δ'_k, площадь фигуры G_2 равна сумме площадей треугольников Δ''_k, и так далее. Площадь фигуры *G* равна сумме площадей треугольников Δ'_k, Δ''_k, Δ'''_k … . Следовательно, она равна сумме площадей фигур $G_1, G_2, G_3, \ldots$. Второе свойство площади доказано.

Докажем третье свойство. Проведя диагональ квадрата со стороной 1, получим его разбиение на два прямоугольных треугольника с катетами, равными 1. Площадь каждого треугольника равна 1/2. Поэтому площадь квадрата равна 1.

Как было доказано ранее, площадь треугольника определяется единственным образом, следующим из определения площади. Однозначность в определении площади треугольника влечёт за собой однозначность в определении площади любой многоугольной фигуры. Теорема доказана.

Отметим ещё одно важное свойство многоугольных фигур. *Если многоугольная фигура F разбита на фигуры F_1 и F_2, причём фигура F_1 – многоугольная, то фигура F_2 тоже является многоугольной.*

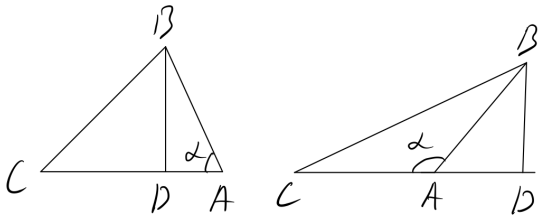
Разобьём фигуру *F* на треугольники $\Delta'_1, \Delta'_2, \Delta'_3, \ldots$, а фигуру F_1 на треугольники $\Delta''_1, \Delta''_2, \Delta''_3, \ldots$. Как и в доказательстве теоремы 110, треугольники первого и второго разбиения, взятые вместе, производят разбиение фигуры *F* на выпуклые многоугольники: треугольники, четырёхугольники, пятиугольники и шестиугольники. Эти многоугольники можно разбить на треугольники $\Delta'''_1, \Delta'''_2, \Delta'''_3, \ldots$. При этом некоторые из треугольников Δ'_k могут совпадать с

треугольниками Δ_k'''. Тогда те из треугольников Δ_k''', которые не относятся к разбиению фигуры F_1, составляют разбиение на треугольники фигуры F_2. Следовательно, F_2 тоже является многоугольной фигурой.

Если F и G многоугольные фигуры, то фигура M, состоящая из F и G также является многоугольной. Доказательство этого свойства основано на разбиении фигур *F* и *G* на треугольники с последующим измельчением, как это делалось в доказательстве теоремы 110.

5. Формулы площади треугольника

1) $S = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A$



Проведём в треугольнике *ABC* высоту *BD*. Тогда $S = \frac{1}{2} AC \cdot BD$. В прямоугольном треугольнике *ABD* $BD = AB \cdot \sin A$, если угол *A* острый, $BD = AB \cdot \sin(180° - A)$, если угол *A* тупой. Так как $\sin(180° - A) = \sin A$, то в любом случае $BD = AB \cdot \sin A$.

Следовательно, площадь треугольника $S = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A$.

2) Формула Герона: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где *a, b, c* – длины сторон треугольника, $p = \frac{a+b+c}{2}$ – полупериметр.

По теореме косинусов $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma$. Отсюда $\cos\gamma = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$,

$$\sin^2\gamma = 1 - \cos^2\gamma = (1-\cos\gamma)(1+\cos\gamma) = \left(1 - \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)\left(1 + \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right) =$$

$$= \frac{2ab - a^2 - b^2 + c^2}{2ab} \cdot \frac{2ab + a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{c^2 - (a-b)^2}{2ab} \cdot \frac{(a+b)^2 - c^2}{2ab} =$$

$$= \frac{1}{4a^2b^2}(c-a+b)(c+a-b)(a+b-c)(a+b+c).$$

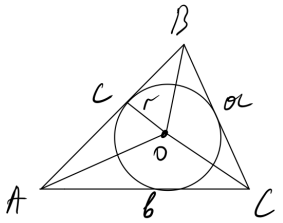
Заметим, что $a + b + c = 2p$, $a + b - c = 2p - 2c$, $a + c - b = 2p - 2b$, $c - a + b = 2p - 2a$. Тогда $\sin\gamma = \frac{2}{ab}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$,

$$S = \frac{1}{2} ab \sin\gamma = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

3) Радиус описанной окружности $R = \dfrac{abc}{4S}$.

По теореме синусов $R = \dfrac{a}{2\sin\alpha}$, где α – угол, противолежащий стороне a треугольника. По формуле 1 $S = \dfrac{1}{2}bc\sin\alpha$, откуда $\sin\alpha = \dfrac{2S}{bc}$. Подставляем выражение для синуса в формулу радиуса и получаем $R = \dfrac{abc}{4S}$.

4) Радиус вписанной окружности $r = \dfrac{S}{p}$, где p – полупериметр.



Площадь треугольника *ABC* равна сумме площадей треугольников *OAB, OBC* и *OCA*: $S = \dfrac{1}{2}cr + \dfrac{1}{2}ar + \dfrac{1}{2}br$.

Отсюда $r = \dfrac{S}{p}$.

6. Площади подобных фигур

Пусть F_1 и F_2 – две подобные многоугольные фигуры. Выясним, как относятся площади этих фигур. Так как фигуры подобны, то существует преобразование подобия, при котором фигура F_1 переходит в фигуру F_2.

Разобьём фигуру F_1 на треугольники $\Delta_1', \Delta_2', \Delta_3', \ldots$. Преобразование подобия, переводящее фигуру F_1 в F_2, переводит эти треугольники в треугольники $\Delta_1'', \Delta_2'', \Delta_3'', \ldots$ разбиения фигуры F_2. Площадь фигуры F_1 равна сумме площадей треугольников $\Delta_1', \Delta_2', \Delta_3', \ldots$, а площадь фигуры F_2 равна сумме площадей треугольников $\Delta_1'', \Delta_2'', \Delta_3'', \ldots$.

Если коэффициент подобия равен k, то размеры треугольника Δ_n'' отличаются в k раз от соответствующих размеров треугольника Δ_n'. В частности, стороны и высоты треугольника Δ_n'' в k раз отличаются от сторон и высот треугольника Δ_n'. Отсюда следует, что $S(\Delta_n'') = k^2\, S(\Delta_n')$. Складывая эти равенства почленно, получим

$$S(F_2) = k^2\, S(F_1).$$

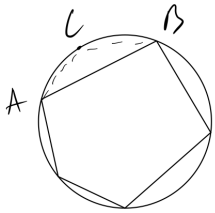
Коэффициент подобия k равен отношению соответствующих линейных размеров фигур F_2 и F_1. Поэтому *площади подобных фигур относятся как квадраты их соответствующих линейных размеров.*

§17. Длина окружности. Площадь круга

1. Длина окружности

Пусть *P* – вписанный в окружность выпуклый многоугольник, *A* и *B* – две его последовательные вершины. Возьмём на дуге *AB* окружности точку *C* и обозначим

P_1 многоугольник, вершинами которого являются вершины многоугольника P и точка C. Переход от многоугольника P к P_1 связан с заменой стороны AB на стороны AC и CB. Так как $AB < AC + CB$, то периметр многоугольника P_1 больше периметра многоугольника P.



Пополняя многоугольник всё новыми вершинами, мы будем увеличивать его периметр. Однако это увеличение не беспредельно. Если взять какой-нибудь пополненный выпуклый описанный многоугольник, то вся окружность, а значит, и любой выпуклый вписанный многоугольник, будут принадлежать этому описанному многоугольнику. Действительно, стороны вписанного многоугольника расположены во внутренней области описанного многоугольника (опр. 88, лемма 8, т. 16), а любая внутрення точка вписанного многоугольника лежит на отрезке с концами на его сторонах (лемма 13), значит, любая точка пополненного вписанного многоугольника принадлежит пополненному описанному многоугольнику. Следовательно, периметры всех выпуклых вписанных многоугольников будут меньше периметра этого описанного многоугольника (т. 106). В частности, квадрат, описанный около окружности, имеет периметр $8R$. Поэтому периметр любого вписанного многоугольника не больше $8R$.

Таким образом, значения периметров вписанных в данную окружность выпуклых многоугольников ограничены сверху. Тогда, как следует из аксиоматики действительных чисел, существует наименьшее число, большее периметра любого вписанного выпуклого многоугольника (такое число называется *точной верхней гранью* периметров выпуклых многоугольников, вписанных в окружность). Это число мы и будем называть длиной окружности.

Определение 102. *Длиной окружности* называется наименьшее число, большее периметра любого вписанного в окружность выпуклого многоугольника.

Лемма 16. Каково бы ни было положительное число a, в данную окружность можно вписать выпуклый многоугольник, периметр которого отличается от длины окружности меньше, чем на a.

Доказательство. Допустим, что утверждение неверно ($\neg$). Тогда периметр любого вписанного многоугольника не больше $l - a$ (l – длина окружности). Следовательно, число l не будет наименьшим числом, большим периметра любого вписанного многоугольника. Число $l - \frac{a}{2}$ меньше l и тоже больше периметра любого вписанного многоугольника $\otimes$. Лемма доказана.

Теорема 111. Отношение длины окружности к её диаметру не зависит от окружности, то есть одно и то же для любых двух окружностей.

Доказательство. Возьмём две произвольные окружности. Пусть R_1 и R_2 – их радиусы, l_1 и l_2 – длины окружностей. Допустим, что утверждение теоремы неверно и $\frac{l_1}{2R_1} \neq \frac{l_2}{2R_2}$ (¬), например $\frac{l_1}{2R_1} > \frac{l_2}{2R_2}$, тогда $\frac{l_1}{l_2} > \frac{R_1}{R_2}$. Обозначим отношение $\frac{R_1}{R_2}$ через k. Тогда $\frac{l_1}{l_2} > k$ и, следовательно, $l_1 > kl_2$.

Впишем в первую окружность многоугольник Q_1, так, чтобы его периметр p_1 отличался от длины окружности меньше, чем на $l_1 - kl_2$ (лемма 16), то есть $l_1 - p_1 < l_1 - kl_2$. Тогда $p_1 > kl_2$.

Применим преобразование гомотетии относительно центра первой окружности с коэффициентом $\frac{1}{k}$. Тогда многоугольник Q_1 перейдёт в подобный ему многоугольник Q, вписанный в окружность радиуса R_2. Совместим движением центр первой окружности с центром второй, тогда многоугольник Q перейдёт в равный ему многоугольник Q_2, вписанный во вторую окружность.

Пусть p_2 периметр многоугольника Q_2. Тогда $p_2 = \frac{1}{k} p_1$, то есть $p_1 = kp_2$. Так как $p_1 > kl_2$, и $p_1 = kp_2$, то $p_2 > l_2$, что противоречит определению длины окружности ⊗. Значит, отношение длины окружности к её диаметру одинаково для обеих окружностей $\frac{l_1}{2R_1} = \frac{l_2}{2R_2}$. Теорема доказана.

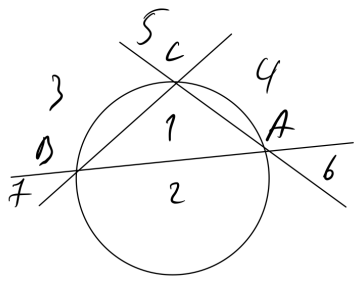
Отношение длины окружности к диаметру принято обозначать греческой буквой π. Таким образом, длина окружности вычисляется по формуле

$$l = 2\pi R.$$

2. Свойства дуг и центральных углов

Теорема 112. Точка C, принадлежащая дуге AB, разбивает эту дугу на две части – дугу AC, не содержащую точку B, и дугу BC, не содержащую точку A.

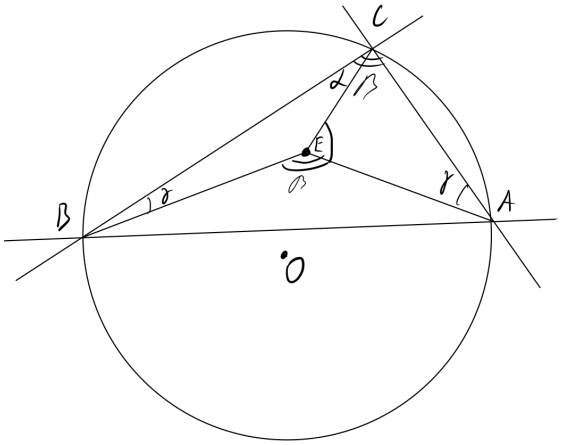
Доказательство. Для доказательства надо показать, что каждая точка дуги AB принадлежит либо дуге AC, либо дуге BC, и наоборот, каждая из точек, принадлежащих дуге AC или BC, принадлежит дуге AB.



Прямые, на которых лежат стороны треугольника ABC, разбивают плоскость на 7 частей, принадлежность к которым может быть описана через принадлежность полуплоскостям относительно этих трёх прямых.

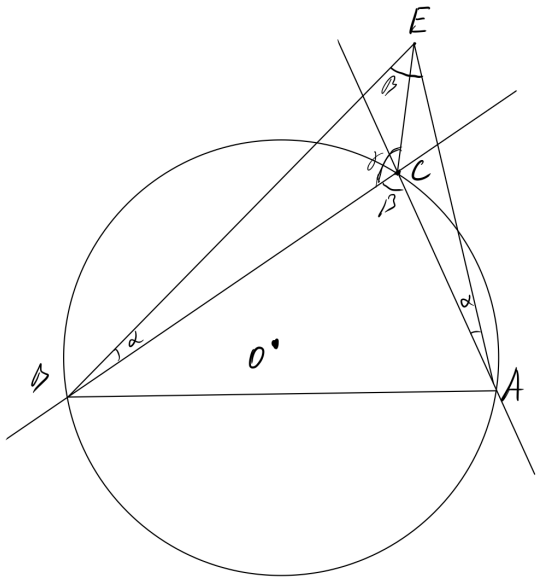
Например, к части 5 относятся точки, лежащие в полуплоскости точки *C* относительно прямой *AB*, не лежащие в полуплоскости точки *A* относительно прямой *BC* и не лежащие в полуплоскости точки *B* относительно прямой *AC*.

Покажем, что точки окружности не могут быть внутренними точками треугольника *ABC* или находиться внутри углов, вертикальных углам треугольника (то есть в областях 1, 5, 6, 7 на рисунке).



Пусть *E* – внутренняя точка треугольника *ABC*. Допустим, что точка *E* принадлежит окружности. Обозначим вписанный угол *BCE* через α, вписанный угол *CBE* обозначим γ и вписанный угол *BEA* обозначим β. Тогда вписанные углы *BCA* и *CAE* равны β и γ соответственно. Луч *CE* проходит между сторонами угла *BCA*, значит, $\angle ECA = \beta - \alpha$; $\angle CEA = 180° - \gamma - (\beta - \alpha) = 180° - \gamma - \beta + \alpha$; $\angle CEB = 180° - \gamma - \alpha$. В тоже время можно показать, что $\angle CEB = 360° - \angle CEA - \angle BEA = 360° - (180° - \gamma - \beta + \alpha) - \beta = 180° + \gamma - \alpha$. Мы пришли к противоречию, следовательно, точка *E* не может принадлежать окружности.

Пусть, теперь, точка *E* лежит внутри угла, вертикального углу *C* треугольника *ABC*.

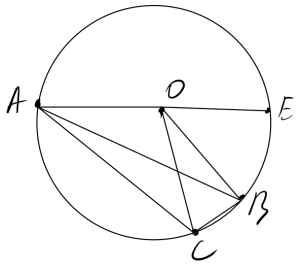


Допустим, что точка *E* принадлежит окружности. Обозначим вписанный угол *CBE* через α, вписанный угол *BEA* обозначим β и вписанный угол *BCE* обозначим γ. Тогда вписанные углы *CAE* и *BCA* равны α и β соответственно. Из треугольника *BEC* получаем, что $\angle BEC = 180° - \gamma - \alpha$. Точка *C* является внутренней точкой треугольника *BEA*, поэтому луч *EC* проходит между сторонами угла *BEA*. Значит, $\angle CEA = \beta - (180° - \gamma - \alpha) = \beta - 180° + \gamma + \alpha$; $\angle ECA = 180° - \alpha - (\beta - 180° + \gamma + \alpha) = 360° - 2\alpha - \beta - \gamma$. В тоже время можно показать, что $\angle ECA = 360° - \angle BCA - \angle BCE =$

$360° - \beta - \gamma$. Мы пришли к противоречию, следовательно, точка *E* не может принадлежать окружности. Доказательство для областей 6 и 7 аналогично.

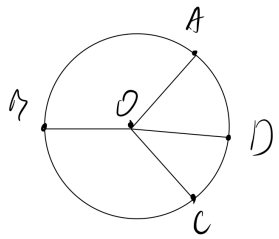
Дуга *AB*, состоит из точек окружности, лежащих в полуплоскости точки C, относительно прямой *AB*. По доказанному, эти точки могут принадлежать либо области 3, либо области 4 на рисунке. Точки, которые принадлежат области 3, являются точками той из дуг *BC*, которая не содержит точку *A*, а точки, принадлежащие области 4, являются точками той из дуг *AC,* которая не содержит точку *B*. Обратно, точки указанных дуг *AC* и *BC* лежат в полуплоскости точки *C* относительно прямой *AB* и, таким образом, принадлежат дуге *AB*. Теорема доказана.

Теорема 113. Если точка *C* принадлежит дуге *AB*, меньшей полуокружности с центром *O*, то диагонали *AB* и *OC* четырёхугольника *AOBC* пересекаются.
Доказательство. Докажем, что четырёхугольник *AOBC* – выпуклый. Дуга *AC*, не содержащая точку *B*, является частью дуги *AB* (т. 112), следовательно, она тоже меньше полуокружности. Значит, точки *O* и *B* лежат в одной полуплоскости относительно прямой *AC*, а с ними и отрезки *AO*, *OB* и *BC* лежат в одной полуплоскости относительно *AC*. Аналогично доказывается, что отрезки *AC, OA* и *OB* лежат в одной полуплоскости относительно прямой *BC*.



Достроим радиус *OA* до диаметра *AE*. Поскольку дуга *AB* меньше полуокружности, точки *B* и *C* лежат в одной полуплоскости относительно прямой *AE*, содержащей отрезок *OA*. Значит, весь четырёхугольник *AOBC* лежит в этой полуплоскости. Аналогично доказывается, что четырёхугольник лежит в одной полуплоскости относительно прямой *OB*. Таким образом, четырёхугольник *AOBC* выпуклый по определению. Тогда его диагонали *AB* и *OC* пересекаются (т. 50). Теорема доказана.

Определение 103. Пусть *AB* и *CD* дуги одной и той же окружности с центром *O*. С помощью поворота относительно точки *O* совместим один из концов дуги *CD* с одним из концов дуги *AB* так, чтобы у двух дуг после совмещения имелись общие точки. Для этого нужно осуществить, например, поворот на угол *COA*, либо на угол *COB*. Если после указанного совмещения оба конца одной дуги совпали с концами другой дуги, то дуги *AB* и *CD* равны. Если точка *C* совпала с *A*, а точка *D* перешла в точку, принадлежащую дуге *AB*, то будем говорить, что дуга *AB больше дуги CD,* а дуга *CD меньше дуги AB*.



Заметим, что когда мы говорим, что дуга *AB* больше или меньше полуокружности *AE*, это можно одинаково понимать как в смысле определения 67, так и в смысле определения 103.

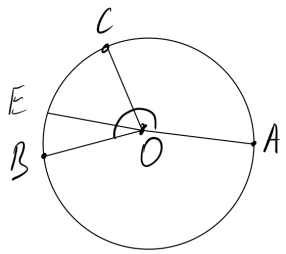
Теорема 114. На одной и той же окружности:

1) равным дугам соответствуют равные центральные углы и наоборот, равным центральным углам соответствуют равные дуги;
2) если точка *C* лежит на дуге *AB*, то градусная мера центрального угла, соответствующего дуге *AB*, равна сумме градусных мер центральных углов, соответствующих дугам *AC* и *CB;*
3) большей дуге соответствует центральный угол с большей градусной мерой и наоборот, большему центральному углу соответствует большая дуга.

Доказательство. 1) В случае совмещения движением дуг *AB* и *CD*, совмещаются и лучи, образующие их центральные углы. Следовательно, эти центральные углы и их градусные меры равны. Обратно, при совмещении движением равных центральных углов, совмещаются и соответствующие им дуги.

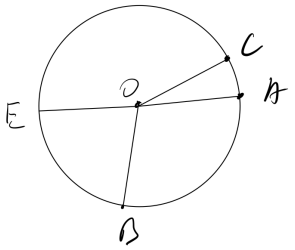
2) Если дуга *AB* не больше полуокружности и точка *C* лежит на дуге *AB*, то луч *OC* проходит между сторонами угла *AOB* (т. 113 и опр. 16). Поэтому $\angle AOB = \angle AOC + \angle COB$, и следовательно, градусная мера центрального угла, соответствующего дуге *AB*, равна сумме градусных мер центральных углов, соответствующих дугам *AC* и *CB*.

Пусть дуга *AB* больше полуокружности. Проведём диаметр *AE* и рассмотрим следующие случаи: а) дуги *AC и CB* меньше полуокружности; б) дуга *AC* меньше полуокружности, а дуга *CB* больше полуокружности; в) одна из дуг *AC* или *CB* равна полуокружности; г) дуга *AC* больше полуокружности, а дуга *CB* меньше полуокружности.



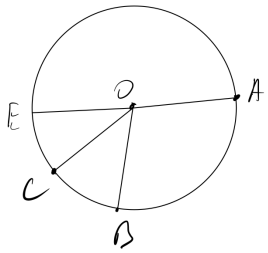
а) Лучи *OC* и *OB* проходят между сторонами развёрнутого угла *AOE*, а луч *OE* проходит между сторонами угла *COB*, поэтому градусная мера центрального угла, соответствующего дуге *AB*, равна $360° - \angle AOB = 360° - (180° - \angle EOB) = 180° + \angle EOB = \angle AOC + \angle COE + \angle EOB = \angle AOC + \angle COB.$

б) В этом случае дуги *CE* и *EB*, не содержащие точку *A*, меньше полуокружности, так что по доказанному градусная мера центрального угла, соответствующий дуге *CB*, не содержащей точку *A*, равна $\angle COE + \angle EOB.$ Градусная мера центрального угла, соответствующего дуге *AB*, равна $360° - \angle AOB = 360° - (180° - \angle EOB) = 180° + \angle EOB = \angle AOC + (\angle COE + \angle EOB).$



в) Пусть, например, дуга *AC* является полуокружностью, тогда градусная мера центрального угла, соответствующего дуге *AB*, равна 360° – ∠*AOB* = 360° – (180° – ∠*COB*) = 180° + ∠*COB.*

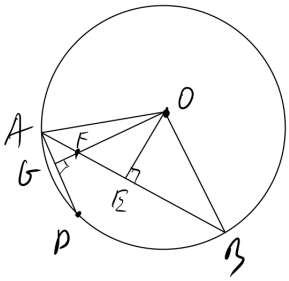
г) Точка *E* разбивает дугу *AB* на части *AE* и *EB* (т. 112), и точка *C* не принадлежит полуокружности *AE*, не содержащей точку *B* (опр. 103). Значит, точка *C* принадлежит дуге *BE*, меньшей полуокружности. Тогда луч *OC* пересекает хорду *BE* и, следовательно, проходит между сторонами угла *EOB*. То есть ∠*EOB* = ∠*EOC* + ∠*COB.* По доказанному в предыдущем пункте, градусная мера центрального угла, соответствующего дуге *AC*, равна 180° + ∠*EOC.* Градусная мера центрального угла, соответствующего дуге *AB*, равна 360° – ∠*AOB* = 360° – (180° – ∠*EOB*) = 180° + ∠*EOB* = (180° + ∠*EOC*) + ∠*COB.*



Таким образом, во всех случаях градусная мера центрального угла, соответствующего дуге *AB*, равна сумме градусных мер центральных углов, соответствующих дугам *AC* и *CB*.

3) Если дуга *AB* больше дуги *CD*, то при совмещении их концов, например, *C* и *A*, точка *D* перейдёт в точку *D*' на дуге *AB*. По доказанному в предыдущем пункте центральный угол, соответствующий дуге *AB* равен сумме центральных углов, соответствующих дугам *AD*' и *D*'*B.* Следовательно, градусная мера центрального угла, соответствующего дуге *AB*, больше градусной меры центрального угла, соответствующего дуге *AD*' и равной ей дуге *CD.* Теорема доказана.

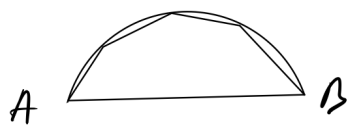
<u>Теорема 115</u>. Из двух неравных дуг, меньших полуокружности, большая дуга стягивается большей хордой. Обратно, большая хорда стягивает большую дугу.
<u>Доказательство</u>. Пусть дуга *AB* больше дуги *CK*. Совместим движением один из концов дуги *CK* с точкой *A* так, чтобы второй конец перешёл в точку *D*, принадлежащую дуге *AB*. Покажем, что хорда *AB* больше хорды *AD,* равной *CK*.



Проведём высоты *OE* и *OG* равнобедренных треугольников *OAB* и *OAD*. Луч *AB* проходит между сторонами угла *DAO* (т. 113), следовательно, он пересекает отрезок *OG* в точке *F*. В прямоугольном треугольнике *OFE OF* > *OE*, в тоже время *OG* > *OF*, следовательно, *OG* > *OE*. В треугольниках *OAG* и *OAE* гипотенуза *OA* общая, а катет *OE* меньше катета *OG*. Тогда, как не сложно доказать с помощью теоремы Пифагора, катет *AE* больше катета *AG*. Эти катеты составляют половины хорд *AB* и *AD*, поэтому *AB* > *AD* = *CK* ⇒ *AB* > *CK.* Теорема доказана.

3. Длина дуги окружности. Радианная мера угла

Определение 104. Ломаную $AA_1A_2\ldots B$ будем называть *вписанной в дугу AB*, если точки A_1, A_2, … принадлежат дуге AB. Ломаную $AA_1A_2\ldots B$ будем называть *описанной около дуги AB*, если все звенья ломаной касаются окружности, содержащей дугу AB, причём точки касания принадлежат дуге AB.



Описанная около дуги окружности выпуклая ломаная является объемлющей для любой вписанной выпуклой ломаной. Следовательно, длины вписанных ломаных не могут неограниченно увеличиваться (т. 107). Тогда можно дать следующее определение длины дуги окружности.

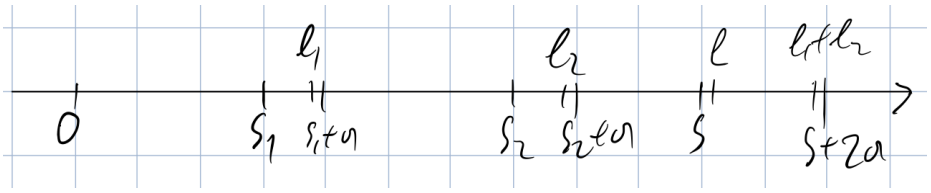
Определение 105. *Длиной дуги окружности* называется наименьшее число, большее длины любой выпуклой ломаной, вписанной в эту дугу.

Дословно так же, как для всей окружности, доказывается, что каково бы ни было положительное число a, в данную дугу окружности можно вписать выпуклую ломаную, длина которой будет отличаться от длины дуги меньше, чем на a.

Лемма 17. Если точка C принадлежит дуге AB, то длина дуги AB равна сумме длин дуг AC и CB.

Доказательство. Возьмём малое положительное число a. Впишем в дуги AB, AC и CB ломаные γ, γ_1 и γ_2 так, чтобы их длины отличались от длин дуг меньше, чем на a. Пополним вершины ломаной γ вершинами ломаных γ_1 и γ_2, а вершины ломаных γ_1 и γ_2 пополним вершинами ломаной γ. Тогда получим ломаные γ', γ_1' и γ_2', вписанные в дуги AB, AC и CB (т. 112). Так как пополнение ломаной новыми вершинами только увеличивает её длину, то длины ломаных γ', γ_1' и γ_2' отличаются от длин соответствующих дуг тоже меньше, чем на a.

Обозначим длины дуг через l, l_1, l_2, а длины ломаных через s, s_1 и s_2. Ломаные γ_1' и γ_2' являются частями ломаной γ', на которые она разбивается точкой C. Поэтому длина ломаной γ' равна сумме длин ломаных γ_1' и γ_2', то есть $s = s_1 + s_2$. Так как $l - s < a$, $l_1 - s_1 < a$, $l_2 - s_2 < a$, а $s = s_1 + s_2$, то l отличается от $l_1 + l_2$ не более, чем на $2a$. Так



как числа l и $l_1 + l_2$ вполне определённые, а число a можно может быть взято сколь угодно малым, то это возможно только если $l = l_1 + l_2$. Лемма доказана.

Из леммы 17 следует, что *из двух дуг окружности большая дуга имеет большую длину.* Из определения длины дуги окружности следует, что *равные дуги имеют равные длины,* поскольку в них можно вписать равные ломаные.

Выпуклый многоугольник по определению является замкнутой выпуклой ломаной, поэтому длина окружности так же, как и длина дуги, является наименьшим числом, большим длины любой вписанной в окружность замкнутой выпуклой ломаной. Значит, точно так же, как доказывается лемма 17, можно доказать, что *сумма длин дуг, на которые окружность разбивается точками A и B, равна длине окружности.*

Теорема 116. Длина дуги l окружности вычисляется по формуле

$$l = \frac{\pi R}{180}\alpha,$$

где α – градусная мера соответствующего центрального угла.

Доказательство. Возьмём большое целое число N и обозначим через θ угол $\frac{180}{N}$.

Пусть n – целое от деления α на θ. Тогда

$$n\theta \le \alpha < (n+1)\theta$$

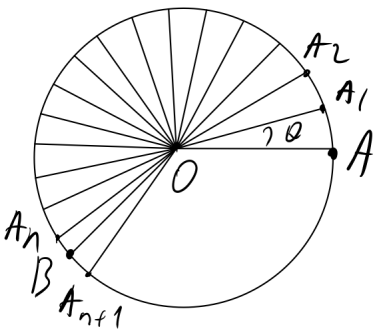
или

$$\frac{n \cdot 180}{N} \leqslant \alpha < \frac{(n+1)180}{N}.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{n}{N}\pi R \leqslant \frac{\pi R}{180}\alpha < \frac{n+1}{N}\pi R.$$

Так как длина дуги окружности равна сумме длин её частей (лемма 17) и равным центральным углам соответствуют равные дуги (т. 114), то длина полуокружости равна πR, а длина дуги, отвечающей углу θ, равна $\frac{\pi R}{N}$. Отложим от полупрямой OA угол A_1OA, равный θ, так, чтобы точка A_1 принадлежала дуге AB. От полупрямой OA_1 отложим угол A_2OA_1, равный θ, и так далее.



Центральный угол, соответствующий дуге AA_n, не больше центрального угла, соответствующего дуге AB, поэтому дуга AB не меньше дуги AA_n или суммарной длины n дуг, равных $\frac{\pi R}{N}$ каждая (т. 114). В тоже время центральный угол, соответствующий дуге AA_{n+1}, больше центрального угла, соответствующего дуге AB, поэтому

дуга *AB* меньше суммарной длины $n + 1$ дуг, равных $\frac{\pi R}{N}$. Значит, для длины дуги *AB* выполняется неравенство

$$\frac{n}{N}\pi R \leqslant l < \frac{n+1}{N}\pi R\,.$$

Мы видим, что оба числа: длина дуги l и число $\frac{\pi R}{180}\alpha$ заключены между числами $\frac{\pi R}{N}n$ и $\frac{\pi R}{N}(n+1)$. Отсюда следует, что величина l отличается от числа $\frac{\pi R}{180}\alpha$ не больше, чем на

$$\frac{\pi R}{N}(n+1) - \frac{\pi R}{N}n,$$

то есть не более, чем на $\frac{\pi R}{N}$. Так как *N* можно взять сколь угодно большим, то отсюда следует, что длина дуги *AB* равна $\frac{\pi R}{180}\alpha$. Теорема доказана.

Определение 106. *Радианной мерой угла* называется отношение длины соответствующей дуги к радиусу окружности.

Из формулы для длины дуги окружности следует, что

$$\frac{l}{R} = \frac{\pi}{180}\alpha,$$

то есть радианная мера угла получается из градусной умножением на $\frac{\pi}{180}$.

Единицей радианной меры углов является *радиан*. Угол в один радиан – это угол, у которого дуга равна радиусу.

4. Общее определение площади

Определение 107. Пусть для ограниченной фигуры *G* существует какая-нибудь содержащая её многоугольная фигура и для любого положительного числа ε существует многоугольная фигура, содержащая границу фигуры *G* и имеющая площадь меньше ε. Тогда площадью фигуры *G* называется число *S*, обладающее следующими свойствами: 1) число *S* не меньше площади любой многоугольной фигуры, содержащейся в фигуре *G*; 2) не существует числа, меньшего *S*, обладающего свойством 1. Для общности будем считать площадь фигур, граница которых может быть заключена в многоугольные фигуры сколь угодно малой площади, но не содержащих многоугольные фигуры (например, дуг или отрезков), равной нулю.

Поскольку фигуру *G* можно заключить в некоторую многоугольную фигуру *P*, то площади многоугольных фигур, содержащихся в *G,* не превосходят площадь *P*.

Тогда из аксиоматики действительных чисел следует, что существует наименьшее число, не меньшее площади любой многоугольной фигуры содержащейся в G (такое число называется *точной верхней гранью* площадей фигур, содержащихся в G). Это число мы и называем площадью фигуры G.

В случае многоугольных фигур данное определение приводит к прежнему значению площади, поскольку среди многоугольных фигур, содержащих данную фигуру, есть она сама.

Также заметим, что условие существования площади в определении 107 для многоугольных фигур выполняется. Действительно, поскольку многоугольную фигуру можно разбить на конечное число треугольников, её граница состоит из конечного числа отрезков, содержащих стороны треугольников разбиения. На любом отрезке, как на стороне, можно построить прямоугольник, вторая сторона которого может быть сколь угодно малой. Тогда и площадь этого прямоугольника, а так же сумма площадей конечного числа таких прямоугольников, может быть сколь угодно малой.

Отметим некоторые свойства площади, непосредственно вытекающие из её определения.

Если фигура G_1 содержится в фигуре G_2, то площадь фигуры G_1 не больше площади фигуры G_2. Действительно, всякая многоугольная фигура, содержащаяся в фигуре G_1, содержится и в фигуре G_2. Поэтому площадь S_2 фигуры G_2 не меньше площади этой многоугольной фигуры. А площадь S_1 фигуры G_1 есть наименьшее число, обладающее этим свойством. Следовательно, $S_1 \leqslant S_2$.

Если фигуры G_1 и G_2 равны, то их площади равны. Действительно, если в фигуре G_1 содержится многоугольная фигура T_1, то в фигуру G_2 можно заключить многоугольную фигуру T_2, равную фигуре T_1. Поэтому площадь S_2 не меньше площади любой многоугольной фигуры, содержащейся в фигуре G_1. А S_1 – наименьшее число, обладающее этим свойством. Следовательно $S_1 \leqslant S_2$. Поменяв теперь ролями фигуры G_1 и G_2, приходим к обратному неравенству: $S_2 \leqslant S_1$. Следовательно, $S_1 = S_2$.

Если фигуры G_1 и G_2 подобны, то их площади относятся как квадраты линейных размеров. Действительно, если в фигуру G_1 можно заключить многоугольную фигуру площадью x, то в фигуре G_2 будет содержаться подобная фигура площадью k^2x, где k – коэффициент подобия. Поэтому $S_2 \geqslant k^2x$. Следовательно, $\frac{S_2}{k^2} \geqslant x$. Таким образом, число $\frac{S_2}{k^2}$ не меньше площади любой многоугольной фигуры, содержащейся в фигуре G_1. Число S_1 есть наименьшее число, обладающее этим

свойством, поэтому $S_1 \leqslant \frac{S_2}{k^2}$. Теперь поменяем ролями фигуры G_1 и G_2. Если фигура G_2 содержит многоугольную фигуру площадью x, тогда фигура G_1 содержит подобную фигуру площадью $\frac{x}{k^2}$. Поэтому $S_1 \geqslant \frac{x}{k^2}$. Следовательно, $S_1k^2 \geqslant x$. Таким образом, число S_1k^2 не меньше площади любой многоугольной фигуры, содержащейся в фигуре G_2. Число S_2 есть наименьшее число, обладающее этим свойством, поэтому $S_1k^2 \geqslant S_2$, или $S_1 \geqslant \frac{S_2}{k^2}$. Сопоставляя полученные неравенства получаем, что $S_1 = \frac{S_2}{k^2}$, или $\frac{S_2}{S_1} = k^2$.

Если фигура разбивается прямой или дугой окружности, то площадь фигуры равна сумме площадей фигур её разбиения.

При доказательстве этого свойства будем использовать то, что отрезок и дугу окружности можно можно заключить в многоугольную фигуру сколь угодно малой площади. Для дуги этот факт будет доказан в следующем пункте.

Пусть фигура G разбивается таким образом на две фигуры, G_1 и G_2. Пусть S_1 и S_2 – их площади, а S – площадь фигуры G. Пусть ε – малое положительное число. Построим многоугольную фигуру T_1, содержащуюся в фигуре G_1 и имеющую площадь не меньше $S_1 - \varepsilon$. Такая фигура существует, если площадь S_1 не равна нулю. В противном случае площади всех многоугольных фигур, содержащихся в G_1, были бы не больше $S_1 - \varepsilon$. Следовательно, площадь фигуры G_1 тоже была бы не больше $S_1 - \varepsilon$. Построим многоугольную фигуру T_2, содержащуюся в фигуре G_2 и площадью не меньше $S_2 - \varepsilon$. Многоугольная фигура, состоящая из T_1 и T_2 содержится в фигуре G и имеет площадь $S_1 - \varepsilon + S_2 - \varepsilon$, поэтому для площади G имеем $S \geqslant S_1 + S_2 - 2\varepsilon$. Так как ε – любое положительное число, то из этого неравенства следует, что $S \geqslant S_1 + S_2$.

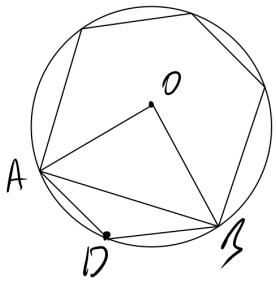
Построим теперь многоугольную фигуру T, содержащуюся в фигуре G и имеющую площадь не меньше $S - \varepsilon$. Общая граница фигур G_1 и G_2 разбивает фигуру T на две фигуры T_1 и T_2 (если бы фигура T оказалась целиком в одной из фигур разиения, например, G_1, то площадь G_1 совпадала бы с площадью фигуры G и доказываемое ниже неравенство тем более выполнялось). Построим многоугольную фигуру P площадью не больше ε, содержащую общую границу фигур T_1 и T_2. Убирая фигуру P, за исключением, быть может, части её границы, из T_1 и T_2, мы получим многоугольные фигуры T_1' и T_2', содержащиеся в фигурах G_1 и G_2. Сумма площадей фигур T_1' и T_2' не меньше $S - 2\varepsilon$. Следовательно, $S_1 + S_2 \geqslant S - 2\varepsilon$. Так как ε сколь

угодно мало, то $S_1 + S_2 \geqslant S$. Сопоставляя полученные неравенства заключаем, что $S_1 + S_2 = S$, что и требовалось доказать.

5. Площадь круга

Лемма 18. При пополнении вписанного выпуклого многоугольника вершинами, его площадь увеличивается.

Доказательство. Поскольку многоугольник выпуклый, каждая прямая, содержащая его сторону, делит окружность на дугу, содержащую вершины многоугольника, и дугу, не содержащую вершины многоугольника. Пусть *AB* – сторона данного вписанного выпуклого многоугольника *P* и точка *D* лежит на дуге *AB*, не содержащей вершин многоугольника. Заменим сторону *AB* на стороны *AD* и *DB* и получим многоугольник P_1. Поскольку дуги *AD* и *DB* являются частями дуги *AB*, они тоже не содержат вершин многоугольника *P*, а значит, все вершины и стороны многоугольника P_1 лежат в одной полуплоскости относительно прямых *AD* и *DB*. Пусть *EK* произвольная сторона многоугольника P_1, тогда точки *A, D* и *B* лежат на одной дуге *EK* со всеми другими вершинами многоугольника, следовательно, весь многоугольник P_1 лежит в одной полуплоскости относительно стороны *EK*, то есть этот многоугольник выпуклый. Диагональ *AB* многоугольника P_1 разбивает его на треугольник *ABD* и многоугольник *P* (доказательство см. в §16 п.1). Следовательно, площадь многоугольника P_1 больше площади многоугольника *P*. Лемма доказана.



Лемма 19. Если центр *O* окружности находится внутри вписанного в окружность выпуклого многоугольника, то радиусы, проведённые из центра к вершинам данного многоугольника, производят разбиение многоугольника на треугольники с общей вершиной *O* и противолежащими сторонами, являющимися сторонами многоугольника.

Доказательство. Требуется доказать, что выполняются условия определения 97. Заметим, что если центр окружности лежит внутри вписанного выпуклого многоугольника, то каждая прямая, проходящая через центр окружности пересекает многоугольник ровно в двух точках, лежащих по разные стороны от центра (лемма 13).

Рассмотрим два треугольника *OAB* и *ONM*, где *AB* и *NM* – стороны данного многоугольника. Допустим, что эти треугольники имеют общую внутреннюю точку *G*. Тогда луч *OG* проходит и между сторонами угла *AOB,* и между сторонами угла *NOM*, следовательно, он пересекает отрезки *AB* и *NM*, что невозможно. Значит, треугольники с вершиной *O* и противолежащими сторонами, являющимися сторонами многоугольника, не могут иметь общих внутренних точек. Первое условие определения 97 выполнено.

Пусть G – внутренняя точка треугольника OAB. Тогда луч OG пересекает сторону AB в некоторой точке P, следовательно, отрезок OP лежит внутри данного многоугольника (т. 10 и 16), то есть, точка G является внутренней точкой многоугольника. Второе условие определения 97 выполнено.

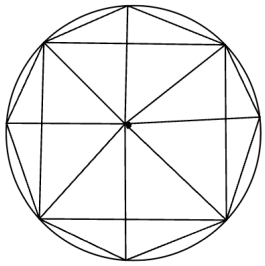
Пусть G – внутренняя точка данного многоугольника, тогда если она не лежит на радиусе, проведённом к вершине многоугольника, то луч OG пересекает в точке P одну из сторон многоугольника, причём точка G лежит на отрезке OP. Значит, точка G является внутренней точкой треугольника, содержащего эту сторону. Третье условие определения 97 выполнено. Лемма доказана.

Аналогично доказывается, что отрезки, проведённые из центра круга к вершинами описанного многоугольника, разбивают этот многоугольник на треугольники.

Докажем выполнение условия существования площади круга. Пусть P_n – правильный 2^n-угольник, вписанный в круг радиуса r, и Q_n – правильный 2^n-угольник, описанный около этого круга. Пусть a_n – сторона многоугольника P_n, а c_n – перпендикуляр, опущенный из центра окружности на эту сторону; b_n – сторона многоугольника Q_n.

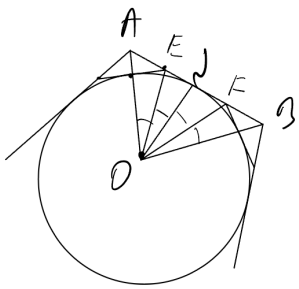
Радиусы круга, проведённые к вершинам многоугольника P_n, разбивают многоугольник на 2^n равных треугольников. Тогда его площадь $S_P = \frac{1}{2}2^n a_n c_n$.
Отрезки, проведённые из центра круга к вершинам многоугольника Q_n, тоже разбивают многоугольник на 2^n равных треугольников, высотами которых являются радиусы окружности, проведённые в точки касания. Тогда его площадь $S_Q = \frac{1}{2}2^n b_n r$.

Из подобия правильных многоугольников получаем: $\frac{b_n}{a_n} = \frac{r}{c_n}$.



Если P_n – квадрат (n = 2) это отношение равно $\sqrt{2}$.
Посмотрим, как меняется это отношение при удвоении сторон многоугольников. Проведём радиусы окружности, перпендикулярные сторонам многоугольника P_n и соединим их концы с вершинами многоугольника. Таким образом получим вписанный правильный многоугольник с удвоенным числом сторон, то есть P_{n+1}. Из неравенства треугольника следует, что $a_n < 2a_{n+1}$.

Пусть N – точка касания стороны AB многоугольника Q_n. Отложим от ON углы NOE и NOF, равные четверти угла AOB. Тогда угол EOF равен половине угла AOB и, следовательно, EF сторона многоугольника Q_{n+1}. Поскольку угол AON равен



половине угла *AOB*, угол *AOE* равен углу *EON*. По свойству биссектрисы треугольника получаем $\frac{AE}{EN} = \frac{OA}{ON} > 1$, следовательно, $AE > EN$. Аналогично $BF > FN$. Тогда $b_n = AB = AE + EF + FB > EN + EF + NF = 2EF = 2b_{n+1}$. То есть, $b_n > 2b_{n+1}$. Значит, отношение $\frac{b_n}{a_n} = \frac{r}{c_n}$ при возрастании n убывает и $1 < \frac{r}{c_n} < \sqrt{2} < 2$.

Из неравенства $b_n > 2b_{n+1}$ следует, что $b_2 > 2b_3 > 2^2b_4 > \ldots > 2^{n-2}b_n$. То есть, $2^{n-2}b_n < b_2 = 2r$. Наконец, $a_n < b_n$, $r - c_n < \frac{1}{2}a_n$, и потому $a_n < \frac{r}{2^{n-3}}$; $r - c_n < \frac{r}{2^{n-2}}$.

Используя полученные неравенства имеем

$$S_Q - S_P = \frac{1}{2}2^n b_n r - \frac{1}{2}2^n a_n c_n = 2^{n-1}(b_n r - a_n c_n) = 2^{n-1}\left(\frac{a_n}{c_n}r^2 - a_n c_n\right) =$$

$$= 2^{n-1}a_n\frac{r + c_n}{c_n}(r - c_n) < 2^{n-1} \cdot \frac{r}{2^{n-3}} \cdot (2 + 1) \cdot \frac{r}{2^{n-2}} = 4r \cdot 3 \cdot \frac{r}{2^{n-2}} = \frac{3r^2}{2^{n-4}}.$$

Следовательно, для любого числа $\varepsilon > 0$, при n, настолько большом, что $2^{n-4} > \frac{3r^2}{\varepsilon}$, справедливо неравенство $S_Q - S_P < \varepsilon$.

Заметим, что поскольку расстояние от точек хорды до центра круга меньше радиуса круга, то все точки хорды принадлежат кругу. Для касательных, наоборот, все точки, кроме точки касания, находятся вне круга. Поэтому круг содержит любой вписанный в окружность многоугольник, и содержится в любом описанном около окружности многоугольнике. Поскольку окружность лежит внутри описанного многоугольника и вне вписанного, она принадлежит многоугольной фигуре, дополняющей вписанный многоугольник до описанного. Площадь этой фигуры, равная $S_Q - S_P$, может быть сколь угодно малой. Следовательно, для круга выполняется условие существования площади.

Поскольку окружность можно поместить в многоугольную фигуру сколь угодно малой площади, любую дугу окружности тоже можно поместить в многоугольную фигуру сколь угодно малой площади.

6. Формулы для вычисления площади круга, кругового сектора и сегмента

Согласно определению 107, площадь круга есть наименьшее число, большее площади любой многоугольной фигуры, содержащейся в круге. Поскольку круг содержится внутри любого описанного многоугольника, площадь круга не больше площади описанного многоугольника. В тоже время выше мы показали, что всегда можно указать вписанный и описанный многоугольники, площади которых

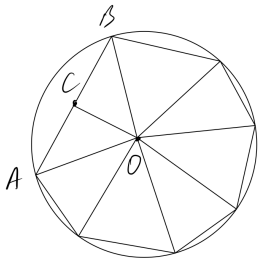
отличаются сколь угодно мало. Следовательно, площадь круга и площадь вписанного многоугольника тоже могут отличаться сколь угодно мало.

Теорема 117. Площадь круга радиуса R вычисляется по формуле

$$S = \pi R^2.$$

Доказательство. Возьмём малое положительное число a. Впишем в окружность круга выпуклый многоугольник P так, чтобы его стороны были меньше a, периметр отличался от длины окружности меньше чем на a, а площадь круга отличалась от площади многоугольника менее, чем на aR. Для этого сначала построим три многоугольника P_1, P_2, P_3 так, чтобы первый многоугольник удовлетворил первому условию, второй – второму, а третий – третьему. Теперь, пополняя многоугольник P_1 вершинами многоугольников P_2 и P_3, получим многоугольник P, удовлетворяющий всем трём условиям (т. 115 и лемма 18).

Если число a достаточно маленькое, то все дуги, стягиваемые сторонами многоугольника, будут меньше полуокружности. Тогда центр круга O будет лежать внутри построенного многоугольника. Площадь многоугольника P мы получим, суммируя площади треугольников с общей вершиной в центре круга и противолежащими сторонами, являющимися сторонами многоугольника P (лемма 19). Рассмотрим площадь одного такого треугольника OAB. Имеем



$$S_{OAB} = \frac{1}{2} AB \cdot OC.$$

Так как $OA > OC > OA - AC$, то

$$\frac{1}{2} AB \left(R - \frac{a}{2} \right) < S_{OAB} < \frac{1}{2} AB \cdot R.$$

Складывая площади всех треугольников, получим

$$\frac{1}{2} p \left(R - \frac{a}{2} \right) < S < \frac{1}{2} pR,$$

где p – периметр многоугольника P, а S – его площадь.

Если в правой части этого неравенства периметр p заменить длиной окружности l, а в левой части величиной $l - a$, то неравенство только усилится:

$$\frac{1}{2}(l - a)\left(R - \frac{a}{2} \right) < S < \frac{1}{2} lR,$$

или

$$\frac{1}{2} lR - \frac{1}{2}\left(aR + \frac{al}{2} - \frac{a^2}{2} \right) < S < \frac{1}{2} lR.$$

Из этого неравенства видно, что площадь многоугольника S отличается от $\frac{lR}{2}$ меньше, чем на $\frac{2aR + al - a^2}{4}$. Так как по построению она отличается от площади

круга меньше, чем на aR, то площадь круга отличается от $\frac{lR}{2}$ меньше, чем на $aR + \frac{2aR + al - a^2}{4} = \frac{a(6R + l - a)}{4}$, то есть сколь угодно мало, если достаточно мало a. А это может быть только в том случае, если площадь круга равна $\frac{lR}{2} = \pi R^2$.

Теорема доказана.

Определение 108. *Круговым сектором* называется часть круга, лежащая внутри соответствующего центрального угла.

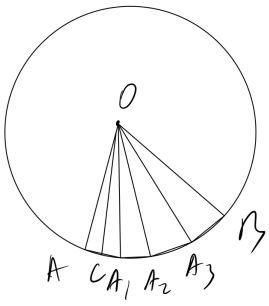
Можно считать, что площадью кругового сектора с центром O, центральный угол которого соответствует дуге AB, является наименьшее число, большее площади любого многоугольника $OAA_1A_2\ldots B$, где точки A_1, A_2 … лежат на дуге AB. Заметим, что многоугольник $OAA_1A_2\ldots B$ не обязательно является выпуклым. Именно, если дуга AB больше полуокружности, то многоугольник $OAA_1A_2\ldots B$ не выпуклый. Однако в этом случае его можно дополнить треугольником OAB до выпуклого вписанного многоугольника $AA_1A_2\ldots B$. Следовательно, многоугольник $OAA_1A_2\ldots B$ является многоугольной фигурой и, как легко убедиться, для него выполняются свойства аналогичные леммам 18 и 19.

Теорема 118. Площадь кругового сектора вычисляется по формуле

$$S = \pi R^2 \frac{\alpha}{360},$$

где R – радиус круга, а α – градусная мера соответствующего центрального угла.

Доказательство. Возьмём малое положительное число a. Впишем в дугу AB ломаную $AA_1A_2\ldots B$ такую, чтобы все её звенья были меньше a, длина отличалась от длины дуги AB меньше, чем на a, а площадь многоугольника $OAA_1A_2\ldots B$ отличалась от площади сектора меньше, чем на aR. Для этого сначала построим три ломаные так, чтобы первая удовлетворяла первому условию, вторая – второму, а третья – третьему. Теперь, пополняя первую ломаную вершинами двух других, получим ломаную $AA_1A_2\ldots B$, удовлетворяющий всем трём условиям.



Площадь многоугольника P: $OAA_1A_2\ldots B$ мы получим, суммируя площади треугольников с общей вершиной в центре круга и противолежащими сторонами на сторонах многоугольника P. Рассмотрим площадь одного такого треугольника OAA_1. Имеем

$$S_{OAA_1} = \frac{1}{2} AA_1 \cdot OC.$$

Так как $OA > OC > OA - AC$, то

$$\frac{1}{2} AA_1 \left(R - \frac{a}{2}\right) < S_{OAA_1} < \frac{1}{2} AA_1 \cdot R.$$

Складывая площади всех треугольников, получим

$$\frac{1}{2}p\left(R-\frac{a}{2}\right)<S<\frac{1}{2}pR,$$

где p – длина ломаной $AA_1A_2\ldots B$, а S – площадь многоугольника P.

Обозначим длину дуги AB через l. Если в правой части полученного неравенства длину p заменить длиной l, а в левой части величиной $l-a$, то неравенство только усилится:

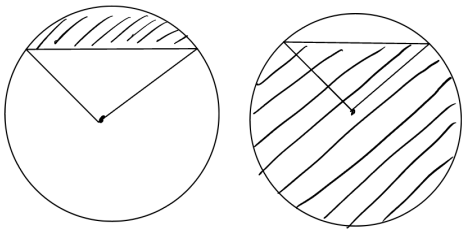
$$\frac{1}{2}(l-a)\left(R-\frac{a}{2}\right)<S<\frac{1}{2}lR,$$

или

$$\frac{1}{2}lR-\frac{1}{2}\left(aR+\frac{al}{2}-\frac{a^2}{2}\right)<S<\frac{1}{2}lR.$$

Из этого неравенства видно, что площадь многоугольника S отличается от $\frac{lR}{2}$ меньше, чем на $\frac{2aR+al-a^2}{4}$. Так как по построению она отличается от площади сектора меньше, чем на aR, то площадь сектора отличается от $\frac{lR}{2}$ меньше, чем на $aR+\frac{2aR+al-a^2}{4}=\frac{a(6R+l-a)}{4}$, то есть сколь угодно мало, если достаточно мало a. А это может быть только в том случае, если площадь сектора равна $\frac{lR}{2}=\pi R^2\frac{\alpha}{360}$. Теорема доказана.

<u>Определение 109</u>. *Круговым сегментом* называется общая часть круга и полуплоскости.



Площадь сегмента, не равного полукругу, вычисляется по формуле

$$S=\frac{\pi R^2}{360}\alpha\pm S_\Delta,$$

где α – градусная мера центрального угла, который содержит дугу этого кругового сектора, а $S_\triangle$ – площадь треугольника с вершинами в центре круга и концах радиусов, ограничивающих соответствующий сектор. Знак «–» надо брать, когда $\alpha<180°$, а знак «+» надо брать, когда $\alpha>180°$.

§18. Векторное исчисление

1. Свойства параллельного переноса

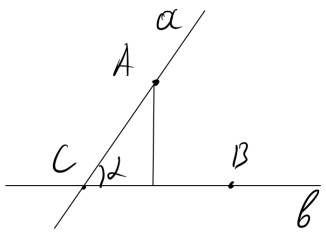
Согласно определению 61, параллельным переносом называется такое движение, при котором точки смещаются по параллельным прямым на одно и то же расстояние. Это значит, что если точки X и Y переходят в точки X' и Y', то прямые XX' и YY' параллельны (или совпадают), а отрезки XX' и YY' равны. Тождественное преобразование, то есть преобразование, оставляющее все точки неподвижными, также считается параллельным переносом.

Теорема 65 даёт важнейшее свойство параллельно переноса: *для любых двух точек A и B существует и притом единственный параллельный перенос, переводящий точку A в точку B.* Теперь докажем ещё несколько свойств параллельного переноса.

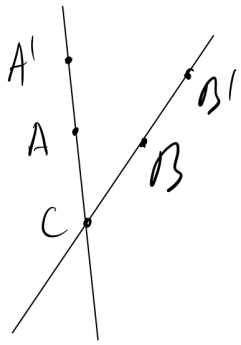
Теорема 119. 1) Преобразование, обратное параллельному переносу, есть параллельный перенос.
2) При параллельном переносе каждая прямая переходит либо в себя, либо в параллельную прямую.
3) Если при движении расстояние произвольной точки X от соответствующей точки X' не превосходит число d, не зависящее от взятой точки X, то это движение есть параллельный перенос.
4) Два параллельных переноса, выполненные последовательно, дают снова параллельный перенос.
Доказательство. 1) Следует из определения параллельного переноса и свойства движения.

2) Допустим, что при параллельном переносе прямая a переходит в прямую b, отличную от a и не параллельную прямой a (¬). Пусть эти прямые пересекаются в точке C. Тогда точка C переходит в некоторую точку C' прямой b, а произвольная точка A прямой a переходит в точку A' прямой b. По определению параллельного переноса прямая CC' (совпадающая с прямой b) должна быть параллельна прямой AA', но эти прямые пересекаются в точке A'⊗. Следовательно, прямые a и b параллельны или совпадают.

3) Прежде всего покажем, что при данном движении каждая прямая переходит либо в себя, либо в параллельную прямую. Допустим, что прямая a переходит в прямую b, отличную от a и не параллельную прямой a (¬). Пусть эти прямые пересекаются в точке C. Отметим на прямой a точку A, которая отстоит от прямой b на расстоянии, большем d. Это расстояние равно $AC \cdot \sin \alpha$, причём AC можно взять сколь угодно большим. При рассматриваемом движении точка A перейдёт в



некоторую точку B на прямой b. Так как расстояние точки A от прямой b больше d, то расстояние от точки A до точки B тоже больше d, а это противоречит условию $\otimes$. Следовательно, прямая b либо совпадает с a, либо параллельна a.

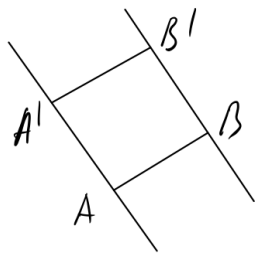


Пусть при данном движении некоторая точка A переходит в точку A', отличную от A. Возьмём точку B, не лежащую на прямой AA'. При рассматриваемом движении точка B перейдёт в некоторую точку B'. Покажем, что прямые AA' и BB' параллельны. Допустим, что эти прямые пересекаются в некоторой точке C ($\neg$). Так как точка B переходит в точку B' прямой CB, то по доказанному прямая CB переходит в себя. Аналогично заключаем, что прямая AC переходит в себя. Следовательно, при рассматриваемом движении точка C остаётся на месте.

Так как прямая AC переходит в себя, а точка C этой прямой остаётся на месте, то полупрямые прямой AC, на которые она разбивается точкой C, либо переходят в себя, либо переставляются. Покажем, что вторая возможность исключается.

Действительно, возьмём на одной из полупрямых точку X на расстоянии d от точки C. Она перейдёт в точку X' дополнительной полупрямой, отстоящей от точки C на расстоянии d. Так как точка C разделяет точки X и X', то расстояние между ними будет $2d$, то есть больше d, вопреки условию. Итак, точка X' должна быть на той же полупрямой, что и точка X. А тогда они, будучи одинаково удалёнными от точки C, должны совпадать. Следовательно, при рассматриваемом движении все точки прямой AC неподвижны. В частности, точка A неподвижна, вопреки предположению (точка A' отлична от A) $\otimes$. Следовательно, прямая BB' параллельна AA'.

Так как по доказанному прямая $A'B'$ параллельна прямой AB, то по свойству параллелограмма отрезки AA' и BB' равны. Таким образом, при рассматриваемом движении точки A и B смещаются по параллельным прямым на одно и то же расстояние. Тогда тем же самым рассуждением устанавливается, что любая точка X, переходящая в точку X', отличную от X, смещается по прямой, параллельной BB' (или AA'), на расстояние, равное BB'. В том числе точки этих самых прямых. Точек, которые переходят сами в себя, при этом движении быть не может, поскольку в этом случае расстояния от неподвижной точки до сместившихся точек не будет сохраняться. Тем самым утверждение доказано, если точка A' отлична от A. Если же для любой точки A точка A' совпадает с A, то движение является параллельным переносом по определению.



4) Пусть первый параллельный перенос переводит произвольную точку X в точку X', а второй параллельный перенос переводит точку X' в X''. Требуется доказать, что преобразование плоскости, при котором точке X сопоставляется точка X'', есть параллельный перенос. Действительно, так как параллельный перенос есть движение, а два движения, выполненные последовательно, дают снова движение, то преобразование, при котором точке X сопоставляется точка X'', есть движение. Покажем, что это движение удовлетворяет условию 3. В самом деле, первый параллельный перенос смещает точки на некоторое расстояние d_1, а второй – на некоторое расстояние d_2. Из неравенства треугольника имеем

$$XX'' \le XX' + X'X'' \le d_1 + d_2,$$

то есть движение $X \to X''$ удовлетворяет условию 3, а значит, является параллельным переносом. Теорема доказана.

2. Направление полупрямой

Определение 110. Полупрямая a' имеет *направление полупрямой* a, если она параллельным переносом совмещается с полупрямой a. Так как обратный параллельный перенос совмещает полупрямую a с a', то полупрямая a имеет направление полупрямой a'. Поэтому можно говорить об *одинаково направленных* или *сонаправленных* полупрямых.

При совмещении полупрямой a' с полупрямой a совмещаются прямые, содержащие полупрямые a' и a. Следовательно, совмещаются и начальные точки этих полупрямых. Поскольку существует только один параллельный перенос, переводящий начальную точку полупрямой a', имеющей направление полупрямой a, в начальную точку полупрямой a, этот же параллельный перенос должен совмещать и сами полупрямые.

Параллельный перенос, совмещающий полупрямую a с a', совмещает полупрямую $\bar{a}$, дополнительную к a, с полупрямой $\bar{a}'$, дополнительной к a'. Поэтому из сонаправленности полупрямых a и a' следует сонаправленность дополнительных полупрямых $\bar{a}$ и $\bar{a}'$.

Из теоремы 119(4) следует, что свойство сонаправленности полупрямых транзитивно, то есть из сонаправленности полупрямых a и a', a' и a'' следует сонаправленность полупрямых a и a''.

Определение 111. Полупрямые a и a' называются *противоположно направленными*, если полупрямая a и полупрямая $\bar{a}'$, дополнительная к a', одинаково направлены.

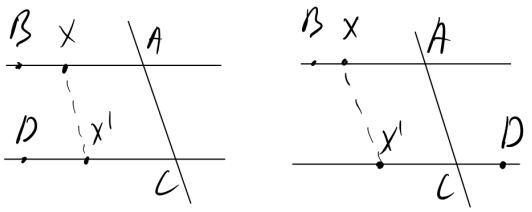
Параллельный перенос, совмещающий полупрямую a с полупрямой $\bar{a}'$, совмещает полупрямую $\bar{a}$, дополнительную к a, с полупрямой a'. Поэтому, если полупрямые a и a' противоположно направлены, то дополнительные им полупрямые также противоположно направлены.

Теорема 120. Две полупрямые *a* и *a*' на одной прямой или на параллельных прямых либо одинаково направлены, либо противоположно направлены, причём одно исключает другое.
Доказательство. Существует и притом единственный параллельный перенос, который переводит начальную точку полупрямой *a* в начальную точку полупрямой *a*' (т. 65). При этом прямые, содержащие *a* и *a*' совмещаются (т. 119(2)). Тогда полупрямая *a* совмещается либо с полупрямой *a*', либо с полупрямой дополнительной к *a*'. В первом случае полупрямые *a* и *a*' сонаправлены, во втором случае они противоположно направлены. Теорема доказана.

Теорема 121. Полупрямые *AB* и *BA* противоположно направлены.
Доказательство. Допустим, что эти полупрямые сонаправлены (¬). Тогда параллельный перенос, который совмещает полупрямую *AB* с полупрямой *BA*, должен переводить точку *A* в *B*, а точку *B* в *A*. Пусть *X* – произвольная точка между *A* и *B*. Она перейдёт в некоторую точку *X*', также лежащую между *A* и *B*. Но при этом расстояние *XX*' меньше *AB*. А это противоречит определению параллельного переноса ⊗. Так как полупрямые *AB* и *BA* лежат на одной прямой, то они либо одинаково направлены, либо противоположно направлены (т. 120). Они не могут быть одинаково направлены, следовательно, они противоположно направлены. Теорема доказана.

Если известно взаимное расположение точек *A, B, C, D* на прямой, то теоремы 120 и 121 позволяют установить как направлены полупрямые *AB* и *CD* – одинаково или противоположно.

Теорема 122. Пусть *AB* и *CD* – две полупрямые, лежащие на параллельных прямых *AB* и *CD*. Тогда полупрямые *AB* и *CD* одинаково направлены, если они расположены в одной полуплоскости относительно секущей *AC*, и противоположно направлены, если они расположены в разных полуплоскостях относительно этой секущей.



Доказательство. Согласно теореме 120, полупрямые *AB* и *CD* либо одинаково направлены, либо противоположно направлены. Параллельный перенос, совмещающий точку *A* с *C*, единственный (т. 65). При этом параллельном переносе каждая точка *X* полупрямой *AB* смещается в некоторую точку *X*' по прямой, параллельной *AC*, следовательно, остаётся в той же полуплоскости относительно секущей *AC*. Поэтому параллельный перенос, переводящий *A* в *C*, переводит

полупрямую *AB* в полупрямую *CD*, если она лежит в той же полуплоскости, что и *AB*, либо в дополнительную полупрямую, если *CD* лежит в другой полуплоскости. Теорема доказана.

3. Понятие вектора

Определение 112. Пусть даны точки *A* и *B,* не обязательно различные. Если точка *A* не совпадает с *B*, будем называть точку *A* *началом отрезка AB*, а точку *B* – *концом*. Тогда отрезок *AB*, для которого указаны начало и конец, называется *вектором AB*. Если точки *A* и *B* совпадают, то будем говорить, что задан нулевой вектор *AA*.

При обозначении вектора двумя буквами, первой всегда пишется буква, обозначающая начало вектора, а второй – буква, обозначающая его конец. Векторы также обозначаются строчными латинскими буквами *a, b, c*, … Иногда вместо слова «вектор» над буквенным обозначением вектора ставится стрелка. Например, $\vec{a}$ читается «вектор *a*». Нулевой вектор также обозначается **0**.

Определение 113. Векторы *AB* и *CD* называются *одинаково направленными*, если полупрямые *AB* и *CD* одинаково направлены. Векторы *AB* и *CD* называются *противоположно направленными*, если полупрямые *AB* и *CD* противоположно направлены. Нулевой вектор считается одинаково направленным с любым вектором.

Определение 114. *Абсолютной величиной* (или *модулем*) вектора *AB* называется длина отрезка *AB*. Абсолютная величина нулевого вектора равна нулю.

Абсолютная величина вектора *AB* обозначается |*AB*|.

Определение 115. Вектор *AB* называется *равным* вектору *CD*, если он совмещается с вектором *CD* параллельным переносом. При этом начало вектора *AB* – точка *A* – совмещается с началом вектора *CD*, точкой *C*, а конец вектора *AB* – точка *B* – совмещается с концом вектора *CD*, точкой *D*. Так как обратный параллельный перенос переводит вектор *CD* в вектор *AB*, то из равенства вектора *AB* вектору *CD* следует равенство вектора *CD* вектору *AB*. Поэтому можно говорить просто о *равенстве* векторов *AB* и *CD*. Все нулевые векторы равны друг другу.

Из определения следует, что *каждый вектор равен самому себе*, поскольку совмещается с собой тождественным преобразованием. Из теоремы 119(4) следует *транзитивность* равенства векторов. Именно, если вектор *a* равен вектору *b*, а вектор *b* равен вектору *c*, то вектор *a* равен вектору *c*.

Из свойств движения и определения направления вектора следует, что *равные векторы имеют одинаковую абсолютную величину и одинаково направлены*.

Теорема 123. Если векторы AB и CD одинаково направлены и имеют одинаковую абсолютную величину, то они равны.
Доказательство. Так как векторы AB и CD одинаково направлены, то параллельный перенос, при котором точка A переходит в точку C, совмещает полупрямую AB с полупрямой CD. При этом ввиду равенства длин отрезков AB и CD точка B переходит в D. Следовательно, параллельный перенос совмещает вектор AB с вектором CD. А это значит, что векторы равны. Теорема доказана.

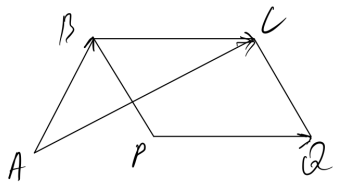
Теорема 124. От любой точки можно отложить вектор, равный данному вектору, и притом только один.
Доказательство. Пусть A – данная точка, и a – данный вектор. Существует единственный параллельный перенос, совмещающий начало вектора a с точкой A. При этом параллельном переносе вектор a перейдёт в равный ему вектор с началом A. Теорема доказана.

4. Сложение и вычитание векторов

Определение 116. Векторы, лежащие на одной прямой или на параллельных прямых, называются *коллинеарными*. Нулевой вектор коллинеарен любому вектору.

Ясно, что *два равных вектора являются коллинеарными* (опр. 115, т. 119(2)). Из транзитивности параллельности прямых, следует, что коллинеарность векторов транзитивна: *если вектор a коллинеарен вектору b, а вектор b коллинеарен вектору c, то a коллинеарен c.*

Определение 117. Суммой вектора AB и вектора BC (обозначается $AB + BC$) называется вектор AC. Суммой вектора AB и любого вектора PQ называется сумма вектора AB и вектора BC, равного PQ. По определению для любого вектора a и нулевого вектора $a + \mathbf{0} = \mathbf{0} + a = a$.



Теорема 125. 1) Если вектор AB равен вектору A_1B_1 и вектор CD равен вектору C_1D_1, то $AB + CD = A_1B_1 + C_1D_1$.
2) Ассоциативность сложения векторов. Для любых векторов a, b, c

$$(a + b) + c = a + (b + c).$$

3) Коммутативность сложения векторов. Для любых векторов a, b, c

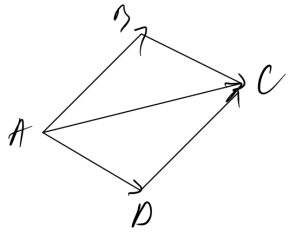
$$a + b = b + a.$$

Доказательство. 1) Вектор $AB + CD$ не изменится, если заменить CD на равный ему вектор BC'. Точно так же вектор $A_1B_1 + C_1D_1$ не изменится, если заменить C_1D_1 на вектор B_1C_1', равный C_1D_1. Тогда $AB + CD = AB + BC' = AC'$ и $A_1B_1 + C_1D_1 = A_1B_1 + B_1C_1' = A_1C_1'$. Остаётся доказать равенство векторов $AC' = A_1C_1'$.

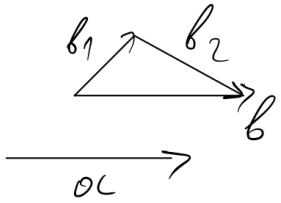
Обозначим p параллельный перенос, при котором точка A переходит в точку A_1. Так как вектор AB равен A_1B_1, то при параллельном переносе p точка B переходит в B_1. А теперь из равенства векторов BC' и B_1C_1' заключаем, что при переносе p точка C' переходит в C_1'. Таким образом, векторы AC' и A_1C_1' совмещаются переносом p, а следовательно, равны.

2) Построим векторы: AB, равный a, BC, равный b, CD, равный c. Тогда, используя свойство 1 и определение сложения векторов получаем, что $(a + b) + c = (AB + BC) + CD = AC + CD = AD$. В тоже время $a + (b + c) = AB + (BC + CD) = AB + BD = AD$. Следовательно, $(a + b) + c = a + (b + c)$.

3) Если хотя бы один из векторов a и b нулевой, то равенство $a + b = b + a$ верно по определению. Рассмотрим случай, когда векторы a и b отличны от нуля и неколлинеарны. Построим вектор AB, равный a, и вектор BC, равный b. Достроим треугольник ABC до параллелограмма $ABCD$. Очевидно, $AB + BC = AD + DC$.



По свойству параллелограмма $|AD| = |BC|$, $|DC| = |AB|$. По теореме 122 векторы AB и DC, а также векторы AD и BC одинаково направлены. Поэтому $AD = BC = b$, $DC = AB = a$ (т. 123). Заменяя в равенстве $AB + BC = AD + DC$ векторы AB, BC, AD и DC равными им векторами a, b, b, a, получим $a + b = b + a$.



Рассмотрим случай коллинеарных векторов a и b. Заменим вектор b суммой любых двух неколлинеарных a векторов b_1 и b_2. По доказанному $a + b_1 = b_1 + a$; $a + b_2 = b_2 + a$. Тогда имеем $a + b = a + (b_1 + b_2) = (a + b_1) + b_2 = (b_1 + a) + b_2 = b_1 + (a + b_2) = b_1 + (b_2 + a) = (b_1 + b_2) + a = b + a$. Теорема доказана.

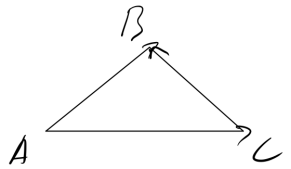
<u>Определение 118</u>. Вектором, *противоположным* вектору AB (обозначается $-AB$), называется вектор BA. Вектор, противоположный нулевому вектору, есть нулевой вектор.

Сумма вектора AB и противоположного ему вектора $-AB$ равна нулевому вектору:

$$AB + (-AB) = AB + BA = AA = \mathbf{0}.$$

<u>Определение 119</u>. Разностью векторов a и b (обозначается $a - b$) называется сумма векторов a и вектора $-b$, противоположного b:

$$a - b = a + (-b).$$



Из определения противоположного вектора следует, что $-(-b) = b$. Поэтому $a - (-b) = a + b$, то есть употребление знаков «+» и «–« для векторов подчиняется тем же правилам, что и для

чисел.

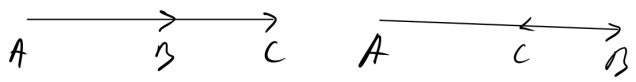
Заметим, что разность векторов AB и AC с общим началом A запишется в виде

$$AB - AC = CB.$$

Действительно, $AB - AC = AB + CA = CA + AB = CB$.

<u>Теорема 126</u>. Пусть a и b – коллинеарные векторы. Тогда, если векторы a и b одинаково направлены, то $|a + b| = |a| + |b|$, а направление вектора $a + b$ совпадает с направлением векторов a и b. Если векторы a и b противоположно направлены и $|a| > |b|$, то $|a + b| = |a| - |b|$, а направление вектора $a + b$ совпадает с направлением вектора a.

<u>Доказательство</u>. Построим вектор AB, равный a, и вектор BC, равный b. Пусть векторы a и b одинаково направлены. Тогда векторы AB и BC одинаково направлены, и следовательно, векторы BA и BC противоположно направлены. Поэтому полупрямые BA и BC дополнительные, а значит, точка B лежит между A и C. Следовательно, $|a + b| = |AB + BC| = |AC| = |AB| + |BC| = |a| + |b|$. Полупрямые AB и AC совпадают, следовательно, направление вектора $AC = a + b$ совпадает с направлением вектора $AB = a$.



Пусть теперь a и b – противоположно направленные векторы и $|a| > |b|$. Тогда векторы AB и BC противоположно направлены, и следовательно, векторы BC и BA одинаково направлены. Поэтому, полупрямые BC и BA совпадают. Так как $|AB| > |BC|$, то точка C лежит между A и B. Поэтому $|a + b| = |AC| = |AB| - |BC| = |a| - |b|$. Полупрямые AB и AC совпадают, следовательно, направление вектора $AC = a + b$ совпадает с направлением вектора $AB = a$. Теорема доказана.

5. Умножение вектора на число

Употребляя одновременно векторы и числа, во избежание недоразумений будем обозначать числа строчными греческими буквами λ, μ, ν …

<u>Определение 120</u>. Произведением вектора AB на отличное от нуля число λ (обозначается λAB или $AB\lambda$) называется вектор AC, имеющий направление вектора AB при $\lambda > 0$ и противоположное направление, если $\lambda < 0$. Абсолютная величина вектора AC равна $|\lambda|\,|AB|$. Произведение нулевого вектора и любого числа, есть нулевой вектор. Произведение любого вектора и нуля равно нулевому вектору.

Из определения следует, что

1) $1 \cdot a = a$ при любом векторе a;
2) $(-1)a = -a$ при любом векторе a;

2) вектор λAB коллинеарен AB и поскольку равные векторы коллинеарны и коллинеарность векторов транзитивна, то любой вектор $b = \lambda AB$ коллинеарен вектору AB.

Лемма 20. Соотношение $a\lambda + b\mu = \mathbf{0}$, где числа λ и μ отличны от нуля, выполняется только в том случае, когда векторы a и b коллинеарны.
Доказательство. Прибавим к левой и правой частям равенства вектор $-b\mu$, получим $a\lambda = -b\mu$. Тогда вектор $a\lambda$ коллинеарен вектору $-b \Rightarrow a$ коллинеарен $-b \Rightarrow a$ коллинеарен b. Лемма доказана.

Теорема 127. 1) Каковы бы ни были числа λ, μ и вектор a,

$$(a\lambda)\mu = a(\lambda\mu) \qquad (\textit{ассоциативность}).$$

2) Каковы бы ни были числа λ, μ и вектор a,

$$a(\lambda + \mu) = a\lambda + a\mu \qquad (\textit{дистрибутивность}\ \mathrm{I}).$$

3) Каковы бы ни были векторы a, b и число λ,

$$(a + b)\lambda = a\lambda + b\lambda\ (\textit{дистрибутивность}\ \mathrm{II}).$$

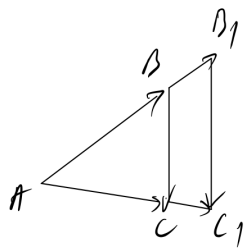
Доказательство. 1) Если хотя бы одно из чисел λ, μ равно нулю или вектор a – нулевой, то, как нетрудно видеть, оба вектора $(a\lambda)\mu$ и $a(\lambda\mu)$ равны нулю и, следовательно, равны друг другу.

Если числа λ, μ и вектор a отличны от нуля, то оба вектора $(a\lambda)\mu$ и $a(\lambda\mu)$ имеют одну и ту же абсолютную величину $|a||\lambda||\mu|$, а их направление совпадает с направлением вектора a при $\lambda\mu > 0$ и противоположно при $\lambda\mu < 0$. Таким образом, векторы $(a\lambda)\mu$ и $a(\lambda\mu)$ равны по абсолютной величине и имеют одинаковые направления, следовательно, равны (т. 123).

2) При $\lambda = 0$ обе части равенства равны $a\mu$, следовательно, равны друг другу. Аналогично при $\mu = 0$ обе части равенства равны $a\lambda$. При $a = \mathbf{0}$ обе части равенства равны нулю. При $\lambda > 0$, $\mu > 0$ и $a \neq \mathbf{0}$ обе части равенства имеют абсолютную величину $(\lambda + \mu)|a|$ и направление вектора a (т. 126). Аналогично можно проверить и убедиться в справедливости равенства векторов $a(\lambda + \mu)$ и $a\lambda + a\mu$ в других случаях: $\lambda < 0$, $\mu < 0$, $\lambda > 0$, $\mu < 0$, $\lambda < 0$, $\mu > 0$.

3) Если вектор $b = \mathbf{0}$, то оба вектора $(a + b)\lambda$ и $a\lambda + b\lambda$ равны $a\lambda$ и, следовательно, равны друг другу. Аналогично, при $a = \mathbf{0}$ оба вектора равны $b\lambda$. Если число $\lambda = 0$, то оба вектора $(a + b)\lambda$ и $a\lambda + b\lambda$ нулевые.

Пусть теперь $\lambda > 0$, оба вектора a и b отличны от нуля и не коллинеарны. Возьмём вектор AB, равный a, и построим вектор BC, равный b. Тогда $AC = AB + BC = a + b$. Подвергнем плоскость преобразованию гомотетии относительно точки A с коэффициентом гомотетии λ. При этом точки B и C перейдут в точки B_1 и C_1. Имеем



$$AC_1 = AB_1 + B_1C_1. \qquad \textbf{(*)}$$

Вектор AC_1 имеет направление вектора AC, а его абсолютная величина равна $|AC|\lambda$. Следовательно, $AC_1 = (a + b)\lambda$ (опр. 120). Аналогично, вектор $AB_1 = a\lambda$. Вектор B_1C_1 имеет направление вектора BC (т. 122), а его абсолютная величина равна $|B_1C_1| = |BC|\lambda$. Следовательно, $B_1C_1 = b\lambda$. Теперь из равенства (*) получаем

$$(a + b)\lambda = a\lambda + b\lambda.$$

Если у λ поменять знак, то все векторы заменятся на противоположные и равенство сохранится.

Рассмотрим, наконец, случай коллинеарных векторов a, b. Представим вектор b в виде суммы двух неколлинеарных векторов b_1 и b_2. По доказанному

$(a + b)\lambda = (a + b_1 + b_2)\lambda = (a + b_1)\lambda + b_2\lambda = a\lambda + b_1\lambda + b_2\lambda = a\lambda + (b_1 + b_2)\lambda = a\lambda + b\lambda$.

Теорема доказана.

Заметим, что из пункта 3 следует, что $-(a + b) = -a - b$. Данный факт легко доказать и непосредственно. Возьмём векторы AB и BC, равные векторам a и b. Тогда $a + b = AC$. Следовательно, $-(a + b) = CA$, и в тоже время $-a - b = BA + CB = CA$.

<u>Теорема 128</u>. 1) Если вектор a отличен от нуля и b – любой коллинеарный ему вектор, то он имеет и притом единственное представление

$$b = a\lambda.$$

2) Если векторы a и b отличны от нуля и не коллинеарны, то любой вектор c допускает и притом единственное представление

$$c = a\lambda + b\mu.$$

<u>Доказательство</u>. 1) Если вектор b равен нулю, то $b = a \cdot 0$. Если вектор b отличен от нуля и имеет направление вектора a, то $b = a\dfrac{|b|}{|a|}$. Если вектор b имеет направление, противоположное a, то $b = -a\dfrac{|b|}{|a|}$. Докажем единственность представления. Пусть вектор b допускает два представления

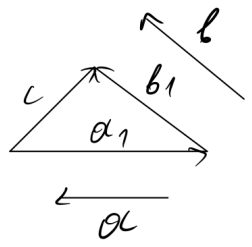
$$b = a\lambda, \quad b = a\mu, \quad \lambda \neq \mu.$$

Из второго равенства следует, что $-b = -a\mu$, тогда складывая с первым равенством, получим

$$\mathbf{0} = a\lambda + (-a\mu) = a\lambda + (-1\cdot\mu a) = a(\lambda - \mu).$$

Слева нулевой вектор, а справа вектор, заведомо отличный от нуля, так как его абсолютная величина $|a||\lambda - \mu| \neq 0$. Мы пришли к противоречию, единственность доказана.

2) Если c – нулевой вектор, то $c = a\cdot 0 + b\cdot 0$. Если c коллинеарен одному из векторов a или b, то равенство следует из пункта 1, например, $c = a\lambda + b\cdot 0$. Пусть вектор c не нулевой и неколлинеарен векторам a и b. Проведём через концы вектора c прямые, параллельные векторам a и b. В результате получим представление вектора c в виде суммы векторов a_1 и b_1, коллинеарных a и b соответственно. Согласно первому утверждению $a_1 = a\lambda$ и $b_1 = b\mu$. Следовательно, $c = a\lambda + b\mu$.



Докажем единственность. Пусть имеем два различных представления

$$c = a\lambda_1 + b\mu_1 \quad \text{и} \quad c = a\lambda_2 + b\mu_2.$$

Из второго равенства следует, что $-c = -(a\lambda_2 + b\mu_2) = -a\lambda_2 - b\mu_2$. Складывая с первым равенством, получим

$$\mathbf{0} = a(\lambda_1 - \lambda_2) + b(\mu_1 - \mu_2).$$

Но это равенство возможно только при $\lambda_1 - \lambda_2 = 0$ и $\mu_1 - \mu_2 = 0$, так как векторы a и b не коллинеарны (лемма 20). Следовательно, представления вектора c вопреки предположению совпадают. Теорема доказана.

Выпишем основные свойства сложения векторов и умножения вектора на число:

1) $a + b = b + a$;
2) $(a + b) + c = a + (b + c)$;
3) существует вектор $\mathbf{0}$, такой, что $a + \mathbf{0} = a$ для любого вектора a;
4) для любого вектора a существует такой вектор $-a$, что $a + (-a) = \mathbf{0}$;
5) $a(\lambda + \mu) = a\lambda + a\mu$ для любых чисел λ, μ и любого вектора a;
6) $(a\lambda)\mu = a(\lambda\mu)$ для любых чисел λ, μ и любого вектора a;
7) $(a + b)\lambda = a\lambda + b\lambda$ для любого числа λ и любых векторов a и b;
8) $1\cdot a = a$ для любого вектора a.

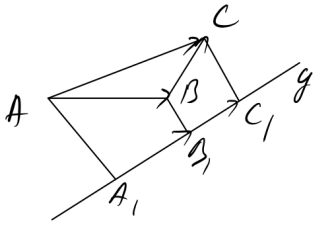
Эти восемь свойств выбраны за основные, потому что все остальные свойства линейных действий над векторами можно вывести из этих восьми, не ссылаясь на геометрию. Развитие этой темы происходит в курсе аналитической геометрии.

6. Скалярное произведение векторов

Определение 121. *Проекцией вектора AB* на прямую *g* называется вектор A_1B_1, начало которого A_1 является проекцией начала *A* вектора *AB*, а конец B_1 является проекцией конца *B* вектора *AB*.

Лемма 21. Равные векторы имеют равные проекции на одну и ту же прямую. Проекция суммы векторов *a*, *b* равна сумме их проекций.

Доказательство. В первом утверждении требуется доказать, что если вектор *AB* равен вектору *CD*, то проекция A_1B_1 на прямую *g* равна проекции C_1D_1 на эту же прямую. При параллельном переносе, совмещающем векторы *AB* и *CD*, прямая *g* перейдёт в параллельную ей прямую *g*', а проекция A_1B_1 перейдёт в $A'_1B'_1$. Тогда четырёхугольник $C_1D_1B'_1A'_1$ является прямоугольником и, следовательно, $|C_1D_1| = |A'_1B'_1|$, а направления полупрямых $A'_1B'_1$, C_1D_1 совпадают (т. 122). Значит, векторы $A'_1B'_1$ и C_1D_1 равны (т. 123), а тогда и векторы C_1D_1 и A_1B_1 тоже равны.



Докажем второе утверждение. Построим вектор *AB*, равный *a*, и вектор *BC*, равный *b*. Тогда $\bar{a} = A_1B_1$, $\bar{b} = B_1C_1$. Отсюда $\bar{a} + \bar{b} = A_1B_1 + B_1C_1 = A_1C_1$. Но A_1C_1 есть проекция вектора $AC = a + b$. Лемма доказана.

Определение 122. *Углом между полупрямыми a и b* называется угол между сонаправленными им полупрямыми a_1 и b_1 с общей начальной точкой.

Это определение не зависит от выбора начала для полупрямых a_1 и b_1, так как совмещение параллельным переносом начала полупрямых совмещает сонаправленные полупрямые.

Определение 123. *Углом между векторами AB и CD* называется угол между полупрямыми *AB* и *CD*.

Определение 124. Скалярным произведением векторов *a* и *b* (обозначается *ab*) называется число, равное произведению абсолютных величин этих векторов на косинус угла между векторами:

$$ab = |a||b| \cos \alpha.$$

Если хотя бы один из векторов *a* и *b* нулевой, то их скалярное произведение равно нулю по определению.

Перечислим несколько свойств скалярного произведения, непосредственно следующих из его определения:

1) $ab = ba$;
2) $a^2 = aa = |a|^2$;
3) если $|e| = 1$, то $(\lambda e)(\mu e) = \lambda\mu$;
4) если $a = b$, то $ac = bc$;
5) скалярное произведение векторов a и b равно нулю в том и только том случае, когда векторы перпендикулярны или хотя бы один из векторов равен нулю.

Теорема 129. Для любых векторов a, b и чисел λ, μ

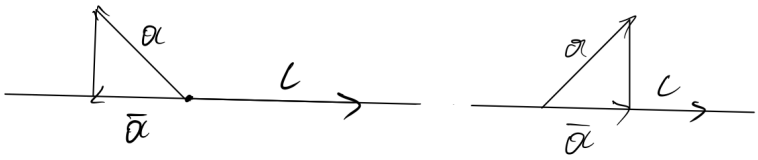
$$(\lambda a)(\mu b) = (\lambda\mu)(ab).$$

Доказательство. Если хотя бы одно из чисел равно нулю или один из векторов – нулевой, то оба произведения равны нулю. Если все вектора и числа не равны нулю, обозначим α угол между векторами a и b. Тогда при $\lambda\mu > 0$ векторы λa и μb образуют угол α, поэтому $(\lambda a)(\mu b) = |\lambda a||\mu b| \cos\alpha = \lambda\mu|a||b| \cos\alpha = (\lambda\mu)(ab)$. При $\lambda\mu < 0$ векторы λa и μb образуют угол $180° - \alpha$, так что $(\lambda a)(\mu b) = |\lambda a||\mu b| \cos(180° - \alpha) = \lambda\mu|a||b| \cos\alpha = (\lambda\mu)(ab)$. Теорема доказана.

Теорема 130 (*дистрибутивность*). Для любых трёх векторов a, b, c

$$(a + b)c = ac + bc.$$

Доказательство. Если хотя бы один из векторов нулевой, то равенство очевидно. Пусть ни один из векторов a, b, c не равен нулю. Очевидно, скалярное произведение вектора a на вектор c равно скалярному произведению проекции $\bar{a}$ вектора a на прямую, содержащую вектор c, и вектора c.



Значит, $(a + b)c = \overline{(a + b)}c = (\bar{a} + \bar{b})c$ (лемма 21) и $ac + bc = \bar{a}c + \bar{b}c$. Поэтому свойство дистрибутивности скалярного умножения достаточно доказать для векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, коллинеарных c:

$$(\bar{a} + \bar{b})c = \bar{a}c + \bar{b}c.$$

Это равенство проверяется непосредственно с помощью теоремы 126.

Если все три вектора $\bar{a}$, $\bar{b}$, c одинаково направлены, то

$$(\bar{a} + \bar{b})c = |\bar{a} + \bar{b}||c| = (|\bar{a}| + |\bar{b}|)|c| = |\bar{a}||c| + |\bar{b}||c| = \bar{a}c + \bar{b}c.$$

Если векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ направлены противоположно вектору c, то

$$(\bar{a} + \bar{b})c = -|\bar{a} + \bar{b}||c| = -(|\bar{a}| + |\bar{b}|)|c| = -|\bar{a}||c| - |\bar{b}||c| = \bar{a}c + \bar{b}c.$$

Если вектор $\bar{a}$ сонаправлен с c, а вектор $\bar{b}$ нет и $|\bar{a}| > |\bar{b}|$, то

$$(\bar{a} + \bar{b})c = |\bar{a} + \bar{b}||c| = (|\bar{a}|-|\bar{b}|)|c| = |\bar{a}||c| - |\bar{b}||c| = \bar{a}c + \bar{b}c.$$

Если вектор $\bar{b}$ сонаправлен с c, а вектор $\bar{a}$ нет и $|\bar{a}| > |\bar{b}|$, то

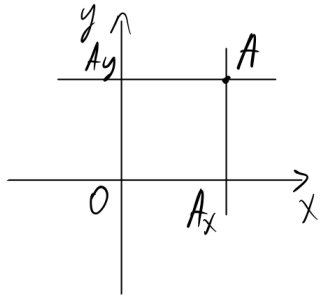
$$(\bar{a} + \bar{b})c = -|\bar{a} + \bar{b}||c| = -(|\bar{a}|-|\bar{b}|)|c| = -|\bar{a}||c| + |\bar{b}||c| = \bar{a}c + \bar{b}c.$$

При $|\bar{a}| < |\bar{b}|$ доказательство аналогично. Теорема доказана.

§19. Метод координат

1. Прямоугольные декартовы координаты на плоскости

Проведём на плоскости через точку O две взаимно перпендикулярные прямые x и y – *оси координат.* Ось x называется *осью абсцисс,* а ось y – *осью ординат*. Точкой пересечения O – *началом координат* – каждая из осей разбивается на две полуоси. Условимся одну из них называть *положительной*, отмечая её стрелкой, а другую – *отрицательной*.

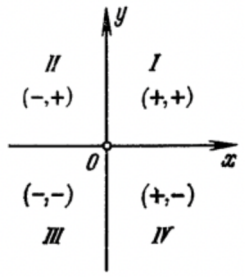


Каждой точке A плоскости мы сопоставим пару чисел – *координаты точки* – абсциссу (x) и ординату (y) по следующему правилу. Через точку A проведём прямую, параллельную оси ординат. Она пересечёт ось абсцисс x в некоторой точке A_x. *Абсциссой* точки A мы будем называть число x, равное по абсолютной величине расстоянию от точки O до A_x, положительное, если A_x принадлежит положительной полуоси, и отрицательное, если A_x принадлежит отрицательной полуоси. Если точка A лежит на оси ординат y, то полагаем x равным нулю.

Ордината (y) точки A определяется аналогично. Через точку A проведём прямую, параллельную оси абсцисс. Она пересечёт ось ординат в некоторой точке A_y. *Ординатой* точки A мы будем называть число y, равное по абсолютной величине расстоянию от точки O до A_y, положительное, если A_y принадлежит положительной полуоси, и отрицательное, если A_y принадлежит отрицательной полуоси. Если точка A лежит на оси абсцисс x, то полагаем y равным нулю.

Таким образом, точки *оси x* (оси абсцисс) имеют равные нулю ординаты (y), а точки *оси y* (оси ординат) – равные нулю абсциссы (x). У начала координат абсцисса и ордината равны нулю.

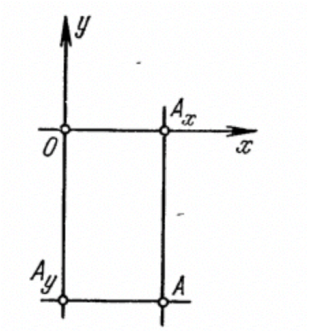
Координаты точки будем записывать в скобках рядом с буквенным обозначением точки, например: A (x; y) (на первом месте – абсцисса, на втором – ордината).



Оси координат разбивают плоскость на четыре прямых угла – *квадранта* – I, II, III, IV. В пределах одного квадранта знаки обеих координат сохраняются и имеют значения, указанные на рисунке.

Плоскость на которой введены описанным способом координаты x и y, называется *плоскостью xy*. Произвольную точку на этой плоскости с координатами x и y будем иногда обозначать просто (x; y).

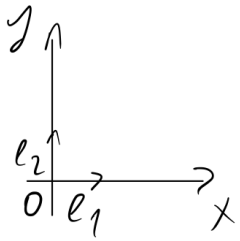
Для произвольной пары чисел x и y существует, и притом единственная, точка A на плоскости xy, для которой x будет абсциссой, а y – ординатой.



Действительно, пусть для определённости $x > 0$, а $y < 0$. Возьмём на положительной полуоси x точку A_x на расстоянии x от начала координат O, а на отрицательной полуоси y – точку A_y на расстоянии $|y|$ от O. Проведём через точки A_x и A_y прямые, параллельные осям y и x соответственно. Эти прямые пересекутся в некоторой точке A, абсцисса которой, очевидно, x и ордината y. В других случаях $x < 0$, $y > 0$; $x > 0$, $y > 0$ и $x < 0$, $y < 0$ – доказательство аналогично.

2. Векторные операции в координатах

Отложим из начала координат O на положительных полуосях осей x и y единичные (то есть имеющие абсолютную величину, равную единице) векторы e_1 и e_2 соответственно. Эти векторы также называют *базисными*.

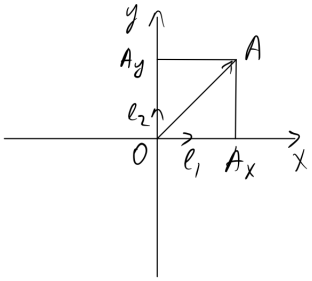


Каждый вектор a имеет и притом единственное представление через базисные векторы e_1 и e_2:

$$a = a_x e_1 + a_y e_2.$$

Числа a_x и a_y называются *координатами вектора a*. Координаты вектора записываются в скобках рядом с обозначением вектора: a (a_x; a_y). Координаты любого нулевого вектора равны нулю (0; 0). Координаты базисных векторов: e_1 (1; 0), e_2 (0; 1).

Из единственности разложения каждого вектора через базисные векторы e_1 и e_2 следует, что *равные векторы имеют равные соответствующие координаты*. Обратно, *если у векторов соответствующие координаты равны, то и векторы равны:* $a = xe_1 + ye_2 = b$.



Покажем, как координаты вектора связаны с координатами его концов. Сначала рассмотрим вектор OA начало которого O является началом координат. Пусть A_x и A_y – проекции точки A на оси x и y соответственно. Из прямоугольника OA_xAA_y получаем, что абсолютные величины векторов A_xA и OA_y равны, а сами векторы сонаправлены, следовательно $A_xA = OA_y$. Тогда вектор OA =

$OA_x + A_xA = OA_x + OA_y$. При этом из определения координат $(x; y)$ точки A следует, что $OA_x = xe_1$, а $OA_y = ye_2$. Значит, $OA = xe_1 + ye_2$, так что координаты вектора OA равны x и y, то есть координатам точки A. Этот факт, очевидно, верен и в случае, когда точка A лежит на оси координат.

Теперь выразим координаты произвольного вектора A_1A_2 через координаты его концов A_1 $(x_1; y_1)$ и A_2 $(x_2; y_2)$. Вектор A_1A_2 равен разности векторов OA_2 и OA_1:

$$A_1A_2 = OA_2 - OA_1.$$

По доказанному $OA_1 = x_1e_1 + y_1e_2$; $OA_2 = x_2e_1 + y_2e_2$, следовательно,

$$A_1A_2 = (x_2 - x_1)e_1 + (y_2 - y_1)e_2.$$

Значит, *координаты a_x и a_y вектора A_1A_2 равны разностям координат его конца и начала: $a_x = x_2 - x_1$ и $a_y = y_2 - y_1$.*

Координатами вектора A_2A_1, противоположного A_1A_2, являются числа $x_1 - x_2$ и $y_1 - y_2$, то есть $-a_x$ и $-a_y$.

Найдём координаты суммы векторов a $(a_x; a_y)$ и b $(b_x; b_y)$:

$$a + b = a_xe_1 + a_ye_2 + b_xe_1 + b_ye_2 = (a_x + b_x)e_1 + (a_y + b_y)e_2.$$

Значит, координатами суммы векторов $a + b$ являются числа $a_x + b_x$ и $a_y + b_y$.

Координаты вектора $-b$, противоположного b, равны $(-b_x; -b_y)$, следовательно, координатами разности векторов $a - b$ являются числа $a_x - b_x$ и $a_y - b_y$.

Найдём координаты вектора λa:

$$\lambda a = \lambda(a_xe_1 + a_ye_2) = \lambda a_xe_1 + \lambda a_ye_2.$$

Таким образом, λa $(\lambda a_x; \lambda a_y)$.

Наконец, выразим скалярное произведение векторов a $(a_x; a_y)$ и b $(b_x; b_y)$ через их координаты. При преобразованиях используем, что $e_1^2 = e_2^2 = 1$, а $e_1e_2 = 0$:

$ab = (a_xe_1 + a_ye_2)(b_xe_1 + b_ye_2) = a_xb_x(e_1e_1) + a_xb_y(e_1e_2) + a_yb_x(e_2e_1) + a_yb_y(e_2e_2) = a_xb_x + a_yb_y$.

Итак,

$$ab = a_xb_x + a_yb_y.$$

3. Расстояние между точками

Пусть на плоскости xy даны две точки A_1 $(x_1; y_1)$ и A_2 $(x_2; y_2)$. Выразим расстояние между точками A_1 и A_2 через координаты этих точек.

Расстояние между точками A_1 и A_2 равно абсолютной величине вектора

$$A_1A_2 = (x_2 - x_1)e_1 + (y_2 - y_1)e_2.$$

Возведём это равенство скалярно в квадрат:

$$(A_1A_2)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

Теперь в левой части равенства стоит квадрат абсолютной величины вектора A_1A_2, равный расстоянию между точками A_1 и A_2.

Расстояние между точками $(x_1; y_1)$ *и* $(x_2; y_2)$ *определяется по формуле*

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

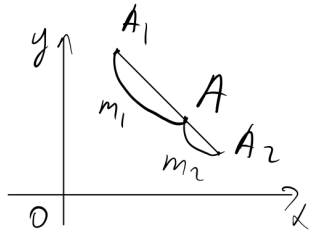
Абсолютная величина вектора a $(a_x; a_y)$ *равна* $\sqrt{a_x^2 + a_y^2}$.

Из формулы абсолютной величины вектора и выражения скалярного произведения векторов в координатах следует, что косинус угла α между векторами a $(a_x; a_y)$ и b $(b_x; b_y)$ выражается формулой

$$\cos\alpha = \frac{a_x b_x + a_y b_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2}}.$$

4. Деление отрезка в данном отношении

Пусть на плоскости xy даны две точки A_1 $(x_1; y_1)$ и A_2 $(x_2; y_2)$. Найдём координаты x, y точки A, делящей отрезок A_1A_2 в отношении $m_1:m_2$.



Векторы AA_1 и AA_2 противоположно направлены, а их абсолютные величины относятся как $m_1:m_2$. Поэтому

$$\frac{AA_1}{m_1} + \frac{AA_2}{m_2} = 0.$$

Но

$$AA_1 = (x_1 - x)e_1 + (y_1 - y)e_2,$$
$$AA_2 = (x_2 - x)e_1 + (y_2 - y)e_2.$$

Следовательно,

$$\frac{x_1 - x}{m_1}e_1 + \frac{y_1 - y}{m_1}e_2 + \frac{x_2 - x}{m_2}e_1 + \frac{y_2 - y}{m_2}e_2 = 0.$$

Поскольку по лемме 20 сумма двух неколлинеарных векторов не может быть равна нулю, из последнего равенства получаем, что

$$\frac{x_1 - x}{m_1} + \frac{x_2 - x}{m_2} = 0; \quad \frac{y_1 - y}{m_1} + \frac{y_2 - y}{m_2} = 0.$$

Решая последние уравнения относительно x и y, находим координаты точки A:

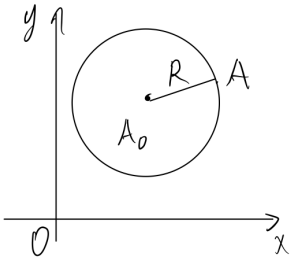
$$x = \frac{m_2 x_1 + m_1 x_2}{m_1 + m_2}, \quad y = \frac{m_2 y_1 + m_1 y_2}{m_1 + m_2}.$$

В частности, координаты середины отрезка: $x_0 = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$, $y_0 = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$.

5. Уравнение окружности

<u>Определение 125</u>. *Уравнением фигуры* на плоскости в декартовых координатах называется уравнение с двумя переменными x и y, которому удовлетворяют

координаты любой точки фигуры. И обратно, любые два числа, удовлетворяющие этому уравнению, являются координатами некоторой точки фигуры.



Составим уравнение окружности с центром в точке A_0 (x_0; y_0) и радиусом R. Возьмём произвольную точку A (x; y) на окружности. Расстояние от неё до центра A_0 равно R. Квадрат расстояния от точки A до A_0 равен $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$. Таким образом, координаты x, y каждой точки A окружности удовлетворяют уравнению

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2. \qquad (*)$$

Обратно: любая точка A, координаты которой удовлетворяют полученному уравнению, принадлежит окружности, так как расстояние от неё до точки A_0 равно R. Отсюда следует, что уравнение (*) действительно является уравнением окружности с центром A_0 и радиусом R.

В геометрии часто возникает две задачи: 1) по заданным геометрическим свойствам фигуры составить её уравнение, 2) по заданному уравнению фигуры найти её геометрические свойства.

Пример решения первой задачи мы только что видели, когда находили уравнение окружности. Рассмотрим задачу второго типа для фигуры, заданной уравнением

$$x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0, \text{ где } a^2 + b^2 - c > 0.$$

Это уравнение можно преобразовать к следующей эквивалентной форме:

$$(x + a)^2 + (y + b)^2 = \left(\sqrt{a^2 + b^2 - c}\right)^2.$$

Из последнего уравнения видно, что каждая точка (x; y) фигуры находится на одном и том же расстоянии, равном $\sqrt{a^2 + b^2 - c}$, от точки ($-a$; $-b$), и, следовательно, искомая фигура является окружностью с центром ($-a$; $-b$) и радиусом $\sqrt{a^2 + b^2 - c}$.

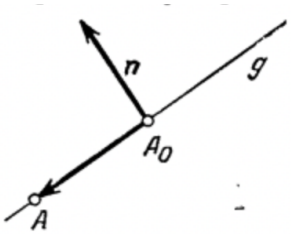
6. Уравнение прямой

<u>Теорема 131</u>. Любая прямая в декартовых координатах имеет уравнение вида

$$ax + by + c = 0, \qquad (*)$$

где a, b, c – постоянные. Обратно, любое уравнение вида (*) является уравнением некоторой прямой.

<u>Доказательство</u>. Пусть g – произвольная прямая, A_0 (x_0; y_0) – точка на ней и n (a_1; a_2) – вектор, перпендикулярный прямой g. Пусть A (x; y) – произвольная точка, лежащая на прямой. Тогда векторы A_0A и n перпендикулярны, а значит, их скалярное произведение равно нулю. Таким образом, каждая точка прямой g удовлетворяет уравнению



$$(x - x_0)a_1 + (y - y_0)a_2 = 0. \qquad (**)$$

Обратно, если точка A (x; y) удовлетворяет этому уравнению, то это значит, что $A_0A \cdot n = 0$, и следовательно,

точка A лежит на прямой g.

Согласно определению уравнение (**) является уравнением прямой g. Его можно переписать так:

$$a_1x + a_2y + (-a_1x_0 - a_2y_0) = 0.$$

Мы видим, что оно имеет вид (*). Тем самым первое утверждение теоремы доказано.

Пусть теперь имеется уравнение $ax + by + c = 0$. Покажем, что оно является уравнением некоторой прямой. Пусть $(x_0; y_0)$ – какое-нибудь решение этого уравнения: $ax_0 + by_0 + c = 0$. С помощью этого соотношения наше уравнение можно преобразовать так:

$$ax + by - ax_0 - by_0 = 0,$$

или

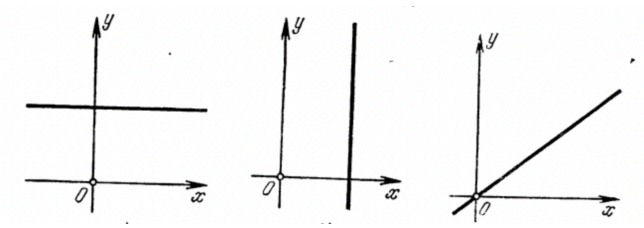
$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0.$$

А в таком виде, как мы видели, оно представляет собой уравнение прямой, проходящей через точку $(x_0; y_0)$ перпендикулярно вектору n $(a; b)$. Теорема доказана.

Заметим, что *в уравнении прямой $ax + by + c = 0$ коэффициенты a и b представляют собой координаты вектора, перпендикулярного прямой.*

7. Расположение прямой относительно системы координат

Выясним, как расположена прямая относительно осей координат, если её уравнение $ax + by + c = 0$ имеет тот или иной частный вид.



1. $a = 0$, $b \neq 0$. В этом случае уравнение прямой можно переписать так: $y = -\frac{c}{b}$. Таким образом, все точки прямой имеют одну и ту же ординату $\left(-\frac{c}{b}\right)$; следовательно, прямая параллельна оси x. В частности, если и $c = 0$, то прямая совпадает с осью x.

2. $b = 0$, $a \neq 0$. Этот случай рассматривается аналогично. Прямая параллельна оси y и совпадает с ней, если и $c = 0$.

3. $c = 0$. Прямая проходит через начало координат, так как его координаты (0; 0) удовлетворяют уравнению прямой.

Если в общем уравнении прямой $ax + by + c = 0$ коэффициент при y не равен нулю, то это уравнение можно разрешить относительно y. Получим:

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}.$$

Или, обозначая $-\frac{a}{b} = k$, $-\frac{c}{b} = q$, получим:

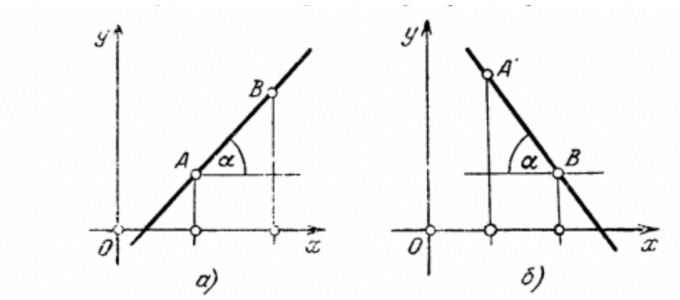
$$y = kx + q.$$

Выясним геометрический смысл коэффициента k в этом уравнении. Возьмём две точки на прямой A (x_1; y_1), B (x_2; y_2) ($x_1 < x_2$). Их координаты удовлетворяют уравнению прямой:

$$y_1 = kx_1 + q, \quad y_2 = kx_2 + q.$$

Вычитая эти равенства почленно, получим: $y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1)$. Отсюда

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$



В случае, представленном на рисунке а) $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \operatorname{tg}\alpha$.

В случае, представленном на рисунке б) $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -\operatorname{tg}\alpha$.

Таким образом, коэффициент k в уравнении прямой с точностью до знака равен тангенсу острого угла, который образует прямая с осью x.

Коэффициент k в уравнении прямой называется *угловым коэффициентом прямой*.

8. Примеры решения задач на прямую

1) Составим уравнение произвольной прямой, проходящей через точку A (x_1; y_1).

Пусть $ax + by + c = 0$ – уравнение искомой прямой. Так как прямая проходит через точку A, то $ax_1 + by_1 + c = 0$. Выражая отсюда c и подставляя её в уравнение прямой, получим

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) = 0.$$

Это и есть общее уравнение прямых, проходящих через точку A. Её координаты (x_1; y_1) всегда удовлетворяют этому уравнению.

2) Составим уравнение прямой, проходящей через две данные точки A_1 (x_1; y_1), A_2 (x_2; y_2).

Так как прямая проходит через точку A_1, то её уравнение можно записать в виде

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) = 0.$$

Так как прямая проходит через точку A_2, то

$$a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1) = 0.$$

Отсюда

$$\frac{a}{b} = -\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},$$

и искомое уравнение прямой имеет вид

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} - \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = 0.$$

3) Пусть даны уравнения двух различных прямых

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0,$$
$$a_2x + b_2y + c_2 = 0.$$

Найдём условия, при которых прямые параллельны, перпендикулярны.

Как мы знаем, вектор $n_1 = a_1e_1 + b_1e_2$ перпендикулярен первой прямой, а вектор $n_2 = a_2e_1 + b_2e_2$ перпендикулярен второй прямой. Для того, чтобы прямые были перпендикулярны, векторы n_1 и n_2 должны быть перпендикулярны, а следовательно, их скалярное произведение должно быть равно нулю, то есть

$$a_1a_2 + b_1b_2 = 0.$$

Обратно, если это условие выполнено, то векторы n_1, n_2 перпендикулярны, а следовательно, прямые перпендикулярны.

Для того, чтобы прямые были параллельны, векторы n_1 и n_2 должны быть коллинеарны, то есть

$$a_1e_1 + b_1e_2 = \lambda(a_2e_1 + b_2e_2),$$

откуда

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}.$$

Обратно, если последнее условие выполнено, то векторы n_1 и n_2 коллинеарны, а следовательно, прямые параллельны.

Итак, *условие параллельности прямых*:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2};$$

условие перпендикулярности прямых:

$$a_1a_2 + b_1b_2 = 0.$$

4) Составим уравнение прямой, параллельной $ax + by + c = 0$ и проходящей через точку A $(x_1; y_1)$.

Каково бы ни было число $\lambda \neq c$, уравнение

$$ax + by + \lambda = 0$$

задаёт прямую, параллельную данной. Выберем λ так, чтобы уравнение удовлетворялось при $x = x_1$, $y = y_1$:

$$ax_1 + by_1 + \lambda = 0.$$

Отсюда

$$\lambda = -ax_1 - by_1.$$

Искомое уравнение есть

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) = 0.$$

5) Составим уравнение прямой, проходящей через заданную точку A $(x_1; y_1)$ перпендикулярно прямой $ax + by + c = 0$.

При любом λ прямая

$$bx - ay + \lambda = 0$$

перпендикулярна заданной прямой. Выбирая λ так, чтобы уравнение удовлетворялось при $x = x_1$, $y = y_1$, находим искомое уравнение

$$b(x - x_1) - a(y - y_1) = 0.$$

9. Уравнения движения

Согласно определению, движение – это взаимно однозначное отображение плоскости на себя, сохраняющее расстояния. Введём на плоскости декартовы координаты x, y. Пусть A $(x; y)$ – произвольная точка плоскости и A' $(x'; y')$ – соответствующая ей точка при движении. Найдём формулы, выражающие координаты x', y' точки A' в зависимости от координат x, y точки A. Эти формулы мы будем называть *уравнениями движения*.

Начнём с простейшего движения – *симметрии относительно прямой*. Введём координаты x, y приняв ось симметрии за ось y. Согласно определению симметрии прямая AA' перпендикулярна оси симметрии (оси y), поэтому она параллельна оси x (или совпадает с осью x). Отсюда следует, что ординаты точек A и A' одинаковы, то есть $y' = y$. Точки A и A' находятся в разных полуплоскостях относительно оси симметрии на равных расстояниях от неё. Поэтому x' и x равны по абсолютной величине и противоположны по знаку, то есть $x' = -x$. Итак, при симметрии относительно оси y

$$x' = -x, \qquad y' = y.$$

Рассмотрим *симметрию относительно точки*. В качестве такой точки возьмём начало координат. По определению симметрии относительно точки, в данном случае относительно начала координат O, полупрямые OA и OA' являются дополнительными, а отрезки OA и OA' равны. Следовательно, векторы OA и OA' противоположны. Имеем

$$OA = xe_1 + ye_2, \quad OA' = x'e_1 + y'e_2.$$

Так как векторы OA и OA' противоположны, то

$$x' = -x, \qquad y' = -y.$$

Рассмотрим *параллельный перенос*. Пусть O' (a; b) – точка, в которую переходит начало координат O при параллельном переносе. Тогда по определению параллельного переноса векторы OO' и AA' коллинеарны и равны по абсолютной величине. Пусть точка A не лежит на прямой OO'. В этом случае фигура $OO'A'A$ – параллелограмм (т. 119 (2)) и, следовательно, векторы OO' и AA' одинаково направлены (т. 122), а значит, равны

$$(x' - x)e_1 + (y' - y)e_2 = ae_1 + be_2.$$

Отсюда

$$x' - x = a, \quad y' - y = b,$$

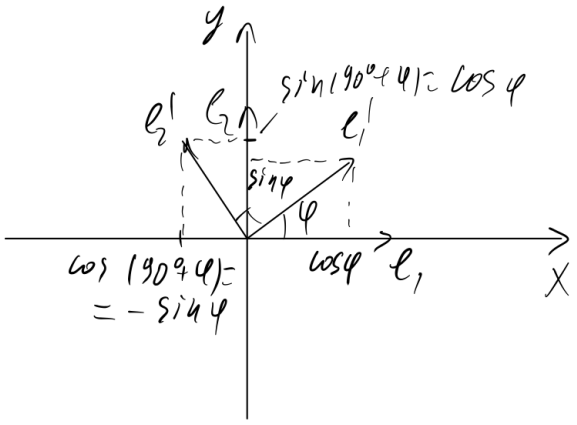
или

$$x' = x + a, \quad y' = y + b.$$

Если точка A лежит на прямой OO', то возьмём точку A_1, не лежащую на этой прямой. Тогда $A_1A'_1A'A$ – параллелограмм. Отсюда – равенство векторов $A_1A'_1$, AA'. Теперь из равенства векторов OO' и $A_1A'_1$ заключаем о равенстве векторов OO', AA' и получаем те же формулы, что и в первом случае. Итак, *при параллельном переносе, который переводит начало координат в точку (a; b), уравнения движения задаются формулами*

$$x' = x + a, \quad y' = y + b.$$

Рассмотрим, наконец, *поворот относительно начала координат.* При повороте базисные векторы e_1 и e_2 перейдут в векторы e_1' и e_2'. Так как движение сохраняет расстояния и углы, то векторы e_1' и e_2' единичные и перпендикулярные. Выразим векторы e_1' и e_2' через векторы e_1 и e_2. Имеем



$$e_1' = \alpha e_1 + \beta e_2, \quad e_2' = \gamma e_1 + \delta e_2.$$

Так как вектор e_1' единичный, то $\alpha^2 + \beta^2 = 1$. Поэтому α и β можно представить в виде $\alpha = \cos\varphi$, $\beta = \sin\varphi$, где φ – некоторый угол. Так как при повороте векторы e_1 и e_1', e_2 и e_2' образуют одинаковые углы, то $e_1'e_1 = e_2'e_2$, то есть $\delta = \alpha = \cos\varphi$. Так как векторы e_1' и e_2' перпендикулярны, то $e_1'e_2' = \alpha\gamma + \beta\delta = 0$, то есть $\gamma\cos\varphi + \sin\varphi\cos\varphi = 0$. Отсюда $\gamma = -\sin\varphi$. Итак,

$$e_1' = \cos\varphi e_1 + \sin\varphi e_2, \; e_2' = -\sin\varphi e_1 + \cos\varphi e_2.$$

Угол φ имеет простой геометрический смысл. Это – угол поворота.

Пусть теперь точка A (x; y) при повороте переходит в точку A' (x'; y'). Имеем

$$OA = xe_1 + ye_2,$$
$$OA' = \lambda e_1' + \mu e_2'.$$

Так как при повороте, как при всяком движении, сохраняются углы между полупрямыми, то вектор OA' образует с векторами e_1' и e_2' те же углы, что и вектор OA с векторами e_1 и e_2. Отсюда $(OA)e_1 = (OA')e_1'$, то есть $\lambda = x$. Аналогично, $\mu = y$. Итак, $OA' = xe_1' + ye_2'$. Подставляя сюда выражения e_1' и e_2' через e_1 и e_2 получим

$$OA' = (x \cos \varphi - y \sin \varphi)e_1 + (x \sin \varphi + y \cos \varphi)e_2.$$

Так как $OA' = x'e_1 + y'e_2$, то

$$x' = x \cos \varphi - y \sin \varphi,$$

$$y' = x \sin \varphi + y \cos \varphi.$$

Таковы уравнения движения в случае поворота.

§20. Тригонометрия

1. Определение тригонометрических функций для любых значений аргумента

В §14 было дано определение тригонометрических функций sin x, cos x, tg x, ctg x для значений аргумента x, $0° \le x \le 180°$. Теперь мы дадим определение этих функций для любых значений аргумента x, требуя, чтобы для любого x

$$\sin (x + 180°) = -\sin x, \qquad (1)$$
$$\cos (x + 180°) = -\cos x. \qquad (2)$$

Эти условия однозначно определяют значения синуса и косинуса для любых значений аргумента, если заданы их значения при $0° \le x \le 180°$. Заметим, что из формул (1, 2) следует, что

$$\sin (x - 180°) = -\sin x,$$
$$\cos (x - 180°) = -\cos x.$$

Действительно, $\sin x = \sin (x - 180° + 180°) = -\sin (x - 180°)$, откуда $\sin (x - 180°) = -\sin x$. Формула для косинуса доказывается аналогично.

Функции tg x и ctg x определяются через sin x и cos x:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Тригонометрические функции sin x и cos x являются периодическими с периодом 360°. Функции tg x и ctg x периодические с периодом 180°.

Действительно, согласно формуле (1)

$$\sin (x + 360°) = -\sin (x + 180°) = \sin x.$$

Это означает, что функция sin x периодическая с периодом 360°. Аналогично устанавливается периодичность функции cos x. Если разделить формулу (1) на формулу (2) почленно, то получим

$$\operatorname{tg}(x + 180°) = \operatorname{tg} x.$$

Аналогично устанавливается периодичность функции ctg x.

Найдём общее выражение для функций sin x, cos x, tg x, ctg x через их значения для углов от 0° до 180°. Любое число x допускает представление

$$x = 180°n + x',$$

где n – целое, а x' заключено между 0° и 180°.

Согласно формулам (1, 2) изменение аргумента функций sin x и cos x на 180° изменяет знак функции. Поэтому при нечётном n $\sin x = -\sin x'$, $\cos x = -\cos x'$, а при чётном n $\sin x = \sin x'$, $\cos x = \cos x'$. Следовательно, при любом n

$$\sin x = (-1)^n \sin x', \quad \cos x = (-1)^n \cos x',$$

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} x', \quad \operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg} x'.$$

2. Формулы приведения

Формулы приведения для тригонометрических функций устанавливают связь между значениями тригонометрических функций аргументов x, $-x$, $180° \pm x$, $90° \pm x$.

Для любых значений аргумента x

$$\sin(180° - x) = \sin x,$$

$$\cos(180° - x) = -\cos x.$$

Для углов x от 0° до 180° эти формулы были доказаны в §14. Покажем, что они верны для любых x. Действительно, любое число x можно представить в виде

$$x = 180°n + x',$$

где n – целое, а $0° \le x' \le 180°$. Как доказано в §14,

$$\sin(180° - x') = \sin x',$$

$$\cos(180° - x') = -\cos x'.$$

Если в левых частях этих формул заменить x' на x, то они либо сохранят своё значение, если n чётное, либо изменят знак, если n нечётное. То же произойдёт и с правыми частями этих формул, если в них заменить x' на x. Поэтому при любом x

$$\sin(180° - x) = \sin x,$$

$$\cos(180° - x) = -\cos x.$$

Почленным делением этих формул получаем

$$\operatorname{tg}(180° - x) = -\operatorname{tg} x,$$

$$\operatorname{ctg}(180° - x) = -\operatorname{ctg} x.$$

Функции sin x, tg x, ctg x нечётные, а функция cos x чётная.

Это значит, что при любом x

$$\sin(-x) = -\sin x,\ \operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x,\ \operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x,\ \cos(-x) = \cos x.$$

Действительно, если в формуле $\sin(180° - x) = \sin x$ в аргументе левой части добавить 180°, то она изменит знак. Таким образом, $\sin(360° - x) = -\sin x$. Но $\sin(360° - x) = \sin(-x)$ по свойству периодичности функции $\sin x$. Поэтому $\sin(-x) = -\sin x$. Аналогично устанавливается чётность функции $\cos x$ с помощью формулы $\cos(180° - x) = -\cos x$. Нечётность функций $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ получается почленным делением формул

$$\sin(-x) = -\sin x, \quad \cos(-x) = \cos x.$$

Для любых значений x

$$\sin(90° - x) = \cos x, \quad \cos(90° - x) = \sin x, \quad \operatorname{tg}(90° - x) = \operatorname{ctg} x.$$

Эти формулы в §14 были установлены для углов $0° \le x \le 90°$. Покажем, что они верны для любых x. Любое число x можно представить в виде

$$x = 90°n + x',$$

где n – целое, а $0° \le x' \le 90°$. Для x' верны формулы

$$\sin(90° - x') = \cos x', \quad \cos(90° - x') = \sin x'.$$

Заменим x' в этих формулах на x, если n чётное. При этом обе части каждой из формул либо сохранят своё значение, либо поменяют одновременно знак и, следовательно, равенство не нарушится. Таким образом,

$$\sin(90° - x) = \cos x, \quad \cos(90° - x) = \sin x.$$

Если n нечётное, то заменим x' на $x + 90°$. При этом также равенство не нарушится. Получаем $\sin(-x) = \cos(x + 90°) = -\cos(x - 90°) = -\cos(90° - x)$, откуда

$$\cos(90° - x) = \sin x.$$

Аналогично, замена x' на $x + 90°$ в формуле $\cos(90° - x') = \sin x'$ даёт

$$\sin(90° - x) = \cos x.$$

Почленным делением полученных формул приходим к

$$\operatorname{tg}(90° - x) = \operatorname{ctg} x.$$

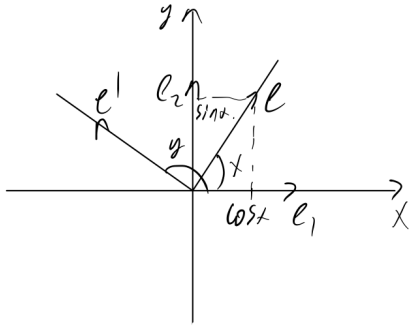
3. Формулы сложения для тригонометрических функций

Формулы сложения для тригонометрических функций дают значения этих функций для аргументов $x + y$ и $x - y$ в зависимости от значений их для аргументов x и y.

Для любых x и y

$$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y,$$
$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y.$$

Докажем сначала эти формулы для значений x и y в пределах от 0° до 180°. Прежде всего заметим, что если x или y равны 0° или 180°, то формулы верны, как показывает непосредственная проверка. Поэтому можно считать, что $0° < x, y < 180°$.



Введём систему координат и отложим на положительных полуосях базисные векторы e_1 и e_2. Отложим от положительной полуоси абсцисс в полуплоскость, где лежит положительная полуось ординат, угол, равный x, и отложим на стороне этого угла единичный вектор e. Конец вектора e лежит на единичной полуокружности с центром в начале координат, поэтому из определения тригонометрических функций следует, что его координаты равны $\cos x$ и $\sin x$. Таким образом,

$$e = \cos x\, e_1 + \sin x\, e_2.$$

Аналогично отложим угол, равный y, и на его стороне отложим единичный вектор e', тогда

$$e' = \cos y\, e_1 + \sin y\, e_2.$$

Умножая векторы e и e' скалярно, получим

$$\cos(\angle ee') = \cos x \cos y + \sin x \sin y.$$

Угол ee' равен $x - y$, если $x \geq y$, и равен $y - x$, если $x < y$. В обоих случаях $\cos(\angle ee') = \cos(x - y)$. Следовательно,

$$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y.$$

Докажем теперь, что эта формула верна при любых x и y. Имеем

$$x = 180°m + x', \quad y = 180°n + y',$$

где m и n – целые, а x' и y' заключены между 0° и 180°.

По доказанному

$$\cos(x' - y') = \cos x' \cos y' + \sin x' \sin y'.$$

Заменим в левой части равенства x' и y' на x и y. При этом она либо сохранит своё значение, если $m - n$ чётно, либо изменит знак, если $m - n$ нечётно. Заменим в правой части равенства x' и y' на x и y. При этом она сохраняет своё значение, если $m + n$ чётно и меняет знак, если $m + n$ нечётно. Замечая, что $m - n$ и $m + n$ одновременно либо чётны, либо нечётны, заключаем, что при замене x' и y' на x и y равенство не нарушится. Следовательно, формула

$$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

верна при любых x и y. В том числе она верна при замене y на $-y$. При этом получается

$$\cos(x - (-y)) = \cos x \cos(-y) + \sin x \sin(-y).$$

Или, принимая во внимание чётность функции $\cos x$ и нечётность функции $\sin x$,

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y.$$

Для любых x и y

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y,$$
$$\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y.$$

Возьмём в формулах косинуса суммы и косинуса разности вместо x значение $x - 90°$. Тогда получим

$$\cos(x + y - 90°) = \cos(x - 90°) \cos y - \sin(x - 90°) \sin y,$$
$$\cos(x - y - 90°) = \cos(x - 90°) \cos y + \sin(x - 90°) \sin y,$$

или

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y,$$
$$\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y.$$

Для любых x и y

$$\mathrm{tg}\,(x + y) = \frac{\mathrm{tg}\,x + \mathrm{tg}\,y}{1 - \mathrm{tg}\,x\,\mathrm{tg}\,y},$$
$$\mathrm{tg}\,(x - y) = \frac{\mathrm{tg}\,x - \mathrm{tg}\,y}{1 + \mathrm{tg}\,x\,\mathrm{tg}\,y}.$$

$$\mathrm{tg}(x + y) = \frac{\sin(x + y)}{\cos(x + y)} = \frac{\sin x \cos y + \cos x \sin y}{\cos x \cos y - \sin x \sin y}.$$

Если числитель и знаменатель правой части равенства разделить на $\cos x \cos y$, то получится формула

$$\mathrm{tg}\,(x + y) = \frac{\mathrm{tg}\,x + \mathrm{tg}\,y}{1 - \mathrm{tg}\,x\,\mathrm{tg}\,y}.$$

Вторая формула выводится аналогично.

§21. Аксиомы стереометрии и некоторые их следствия

Пространством будем называть совокупность всех точек для которых выполняются аксиомы I-X и нижеследующие аксиомы C_1-C_3. Планиметрия – это раздел геометрии, в котором изучаются фигуры на плоскости. Стереометрия – это раздел геометрии, в котором изучаются фигуры в пространстве. Весь предыдущий материал относился к планиметрии.

1. Аксиомы стереометрии

Пространственные аксиомы выражают основные свойства плоскостей в пространстве.

<u>Аксиома C_1</u>. В каждой плоскости есть по крайней мере одна точка. Существуют четыре точки, не принадлежащие одной плоскости.

Аксиома C_2. Если две различные плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой на которой лежат все общие точки этих плоскостей.

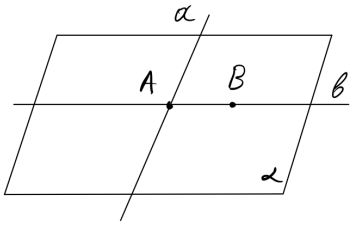
Аксиома C_3. Если две различные прямые имеют общую точку, то через них можно провести плоскость, и притом только одну.

Замечание. Аксиомы I, II, III, IV, V, VII, IX выполняются в пространстве в целом, а не на некоторой плоскости.

2. Некоторые следствия аксиом стереометрии

Теорема 132. Через прямую и не лежащую на ней точку можно провести плоскость и притом только одну.

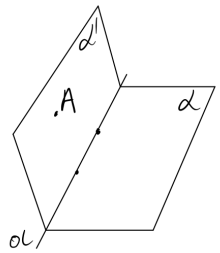
Доказательство. Пусть *a* – данная прямая и *B* – не лежащая на ней точка. Отметим на прямой *a* какую-нибудь точку *A* (акс. I). Проведём через точки *A* и *B* прямую *b* (акс. II). Прямые *a* и *b* различны, так как точка *B* прямой *b* не лежит на прямой *a*. Прямые *a* и *b* имеют общую точку *A*. Проведём через прямые *a* и *b* плоскость *α* (акс. C_3). Эта плоскость проходит через прямую *a* и точку *B*.



Докажем теперь, что плоскость *α*, проходящая через прямую *a* и точку *B*, единственная. Допустим, что существует другая, отличная от *α*, плоскость *α*', проходящая через прямую *a* и точку *B* (¬). По аксиоме C_2 плоскости *α* и *α*', будучи различны, пересекаются по прямой. Следовательно, любые три общие точки плоскостей *α* и *α*' лежат на прямой. Но точка *B* и две точки прямой *a* заведомо не лежат на одной прямой ⊗. Значит, плоскость *α* единственная. Теорема доказана.

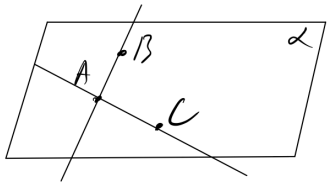
Теорема 133. Если две точки прямой принадлежат плоскости, то вся прямая принадлежит этой плоскости.

Доказательство. Пусть *a* – данная прямая и *α* – данная плоскость. По аксиоме I существует точка *A*, не лежащая на прямой *a*. Проведём через прямую *a* и точку *A* плоскость *α*' (т. 132). Если плоскость *α*' совпадает с *α*, то плоскость *α* содержит прямую *a*, что и утверждается теоремой. Если плоскость *α*' отлична от *α*, то эти плоскости пересекаются по прямой *a*' (акс. C_2), содержащей две точки прямой *a*. По аксиоме II прямая *a*' совпадает с *a* и, следовательно, прямая *a* лежит в плоскости *α*. Теорема доказана.



Теорема 134. Через три точки, не лежащие на прямой, можно провести плоскость и притом только одну.

Доказательство. Пусть *A, B, C* – данные три точки, не лежащие на одной прямой. Проведём прямые *AB* и *AC* (акс. II); они различны, так как точки *A, B, C* не лежат на



одной прямой. По аксиоме C_3 через прямые *AB* и *AC* можно провести плоскость. Эта плоскость содержит точки *A, B, C*.

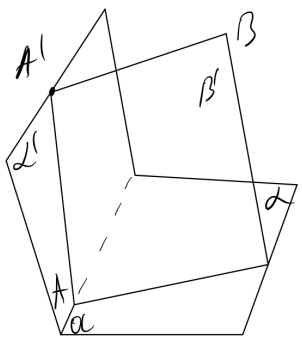
Докажем, что плоскость *α*, проходящая через точки *A, B, C,* единственная. Действительно, плоскость, проходящая через точки *A, B, C,* по теореме 133 содержит прямые *AB* и *AC*. А по аксиоме C_3 такая плоскость единственная. Теорема доказана.

3. Точки в пространстве

Теорема 135. Любой плоскости принадлежит неограниченное количество точек, не лежащих на одной прямой.

Доказательство. Пусть *α* – произвольная плоскость. Прежде всего докажем, что в ней лежит по крайней мере одна прямая. По аксиоме I существуют три точки, не лежащие на одной прямой. Выберем эти три точки и проведём через них плоскость *β* (т. 134). Если плоскость *β* совпадёт с *α*, то в плоскости *α* есть три точки, через две из которых можно провести прямую (акс. II). Пусть *β* не совпадает с *α.*

Если плоскость *β* пересекается с плоскостью *α*, то по аксиоме C_2 в плоскости *α* лежит прямая *a*, являющаяся прямой пересечения плоскостей *α* и *β*. Если *β* не пересекается с *α*, обозначим *A* точку, принадлежащую плоскости *α* (акс. C_1) и проведём через какие-нибудь две точки плоскости *β* (эти точки не лежат на одной прямой с точкой *A*, поскольку тогда плоскости *α* и *β* пересекались) и точку *A* плоскость *γ*. Плоскость *γ* пересечёт *α* по прямой *a* (акс. C_2).

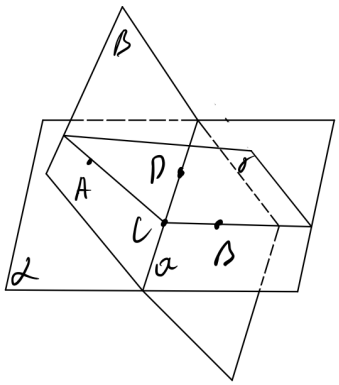


Теперь докажем, что на плоскости *α* найдутся точки, не лежащие на прямой *a*. Отметим точку *A* на прямой *a* (акс. I) и точку *A*' вне плоскости *α* (акс. C_1). Проведём плоскость *α*' через прямую *a* и точку *A*' (т. 132). Возьмём точку *B* вне плоскости *α*'. Если *B* принадлежит *α*, то через неё и какую-нибудь точку *a* можно провести прямую, лежащую в плоскости *α* (т. 133). В противном случае проведём через прямую *AA*' и точку *B* плоскость *β*'. Плоскости *α* и *β*' пересекаются по прямой, проходящей через точку *A*. Точки этой прямой, отличные от *A*, лежат в плоскости *α* вне прямой *a*. Теорема доказана.

Замечание. В теореме 135 при доказательстве существования точек вне прямой *a* мы не могли сослаться на аксиому I, поскольку эта аксиома не гарантирует наличие точки вне прямой *a* на какой-то конкретной плоскости (в данной случае *α*).

Следствие. Поскольку на любой прямой лежит неограниченное количество точек, а через любые две точки можно провести новую прямую, из теоремы 135 следует, что на любой плоскости есть неограниченное количество прямых.

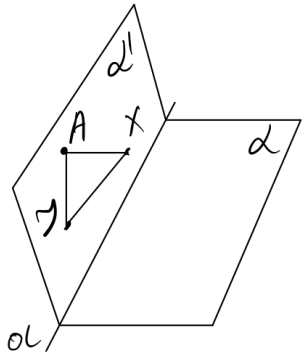
Рассмотрим вопрос о количестве плоскостей в пространстве. Из пространственных аксиом следует существование по крайней мере двух плоскостей, пересекающихся по некоторой прямой *a*. Действительно, так как существуют четыре точки, не лежащие в одной плоскости (и не все из них лежат на одной прямой по аксиоме I), мы можем провести плоскость через какие-то три из них и ещё одну плоскость через две точки в проведённой плоскости и одну точку вне её. Теперь в соответствии с теоремой 135 мы можем выбрать точку *A*, не принадлежащую прямой *a*, из первой плоскости и не принадлежащую прямой *a* точку *B* из второй. Через эти две точки и какую-нибудь точку *C* прямой *a* можно провести третью плоскость. Теперь выбрав на прямой *a* новую точку *D* через неё и точки *A* и *B* можно провести четвёртую плоскость и так далее. Мы получаем, что в пространстве есть неограниченное количество плоскостей и лежащих на них точек.



Теорема 136. Плоскость разбивает пространство на два полупространства. Если точки *X* и *Y* принадлежат одному полупространству, то отрезок *XY* не пересекается с плоскостью. Если же точки *X* и *Y* принадлежат разным полупространствам, то отрезок *XY* пересекается с плоскостью.

Доказательство. Пусть *α* – данная плоскость. Отметим точку *A*, не лежащую на плоскости *α* (акс. C_1). Разобьём все точки пространства, не лежащие в плоскости *α*, на два класса по следующему правилу. Точку *X,* вместе с точкой *A*, отнесём в первый класс, если отрезок *AX* не пересекается с плоскостью *α.* Точку *X* отнесём во второй класс, если отрезок *AX* пересекается с плоскостью *α.* Таким образом, каждая точка *X* пространства, не лежащая в плоскости *α*, будет отнесена в один из классов. Покажем, что это разбиение пространства обладает свойствами, указанными в теореме.

Пусть точки *X* и *Y* принадлежат первому классу. Проведём через точки *A, X* и *Y* плоскость *α*'. Если плоскость *α*' не пересекается с плоскостью *α*, то отрезок *XY*, лежащий в плоскости *α*' (т. 133), тоже не пересекается с этой плоскостью. Допустим, плоскость *α*' пересекается с плоскостью *α*. Так как плоскости различны, то их пересечение происходит по некоторой прямой *a* (акс. C_2). Прямая *a* разбивает плоскость *α*' на две полуплоскости (акс. VI). Так как отрезки *AX* и *AY* не пересекаются с плоскостью *α*, то они не пересекаются и с прямой *a*. Следовательно, точки *X* и *Y* принадлежат одной полуплоскости плоскости *α*', именно той, в которой лежит



точка *A*. Поэтому отрезок *XY* не пересекается с прямой *a*, а следовательно, и с плоскостью *α*.

Если точки *X* и *Y* принадлежат второму классу, то плоскость *α*' заведомо пересекается с *α*, так как отрезок *AX* пересекается с *α*. Точки *X* и *Y* принадлежат одной полуплоскости разбиения плоскости *α*' прямой *a*. Следовательно, отрезок *XY* не пересекается с прямой *a*, а значит, и с плоскостью *α*.

Если, наконец, точка *X* принадлежит одному классу, а точка *Y* другому, то плоскость *α*' пересекается с *α,* а точки *X* и *Y* лежат в разных полуплоскостях плоскости *α*' относительно прямой *a.* Поэтому отрезок *XY* пересекается с прямой *a*, а значит, и с плоскостью *α*.

Если вместо точки *A* взять другую точку *B*, то разбиение пространства на полупространства не изменится. Действительно, если точка *B* лежит в полупространстве точки *A*, то для любой точки *X* этого полупространства отрезок *BX* не пересекается с плоскостью *α*, и следовательно, точка *X* также лежит в полупространстве точки *B* относительно плоскости *α.* Аналогично для любой точки *Y*, не лежащей в полупространстве точки *A*, отрезок *BY* пересекается с плоскостью *α*, и следовательно, точка *Y* не лежит в полупространстве точки *B*. Значит, разбиение на полупространства не изменилось. Если точка *B* не лежит в полупространстве точки *A*, доказательство аналогично. Теорема доказана.

Для плоскостей и полупрямых в пространстве можно доказать теоремы аналогичные теоремам 9-11.

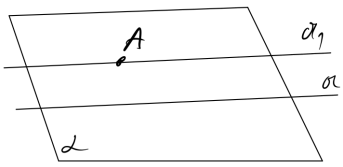
§22. Параллельность прямых и плоскостей

1. Параллельные прямые в пространстве

Определение 126. Две прямые в пространстве называются *параллельными*, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются.

Теорема 137. Через точку вне данной прямой можно провести прямую, параллельную этой прямой, и притом только одну.

Доказательство. Пусть *a* – данная прямая и *A* точка, не лежащая на этой прямой.



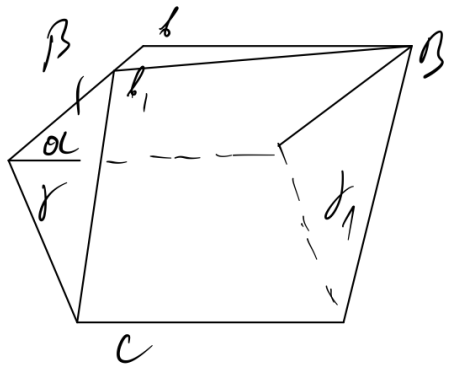
Проведём через прямую *a* и точку *A* плоскость *α* (т. 132). Проведём через точку *A* в плоскости *α* прямую a_1, параллельную *a*. Докажем, что прямая a_1, параллельная *a*, единственная.

Допустим, существует другая прямая a_2, проходящая через точку *A*, и параллельная прямой *a*. Через прямые *a* и a_2 можно провести плоскость α_2 (опр. 126). Плоскость α_2 проходит через прямую *a* и точку *A*,

следовательно, по теореме 132 она совпадает с a. Теперь по аксиоме параллельных (акс. X) прямые a_1 и a_2 совпадают. Теорема доказана.

Теорема 138. Две прямые, параллельные третьей прямой, параллельны.
Доказательство. Пусть прямые b и c параллельны прямой a. Докажем, что прямые b и c параллельны.

Случай, когда прямые a, b, c лежат в одной плоскости, был рассмотрен в планиметрии. Поэтому предположим, что эти прямые не лежат в одной плоскости. Пусть β – плоскость, в которой лежат прямые a и b, а γ – плоскость, в которой лежат прямые a и c (опр. 126). Плоскости β и γ различны. Отметим на прямой b какую-нибудь точку B и проведём плоскость γ_1 через прямую c и точку B (т. 132). Она пересечёт плоскость β по прямой b_1 (акс. C_2).



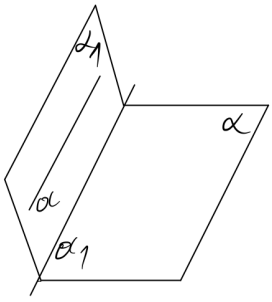
Прямая b_1 не пересекает плоскость γ. Действительно, точка пересечения должна принадлежать прямой a, так как прямая b_1 лежит в плоскости β, а плоскости β и γ пересекаются по прямой a. С другой стороны точка пересечения прямой b_1 и плоскости γ должна лежать на прямой c, так как прямая b_1 лежит в плоскости γ_1, а плоскости γ_1 и γ пересекаются по прямой c. Но прямые a и c как параллельные не имеют общей точки.

Так как прямая b_1 не пересекает плоскость γ, то она не пересекает прямые a и c, лежащие в плоскости γ. Прямые b_1 и a лежат в плоскости β и не пересекаются, следовательно, b_1 параллельна a (опр. 126), а значит, совпадает с b по аксиоме параллельных. Таким образом, прямая b, совпадая с прямой b_1, лежит в одной плоскости с прямой c (в плоскости γ_1) и не пересекает её. Значит, прямые b и c параллельны. Теорема доказана.

2. Параллельность прямой и плоскости

Определение 127. Прямая и плоскость называются *параллельными,* если они не пересекаются.

Теорема 139. Если прямая, не принадлежащая плоскости, параллельна какой-нибудь прямой в этой плоскости, то она параллельна и самой плоскости.

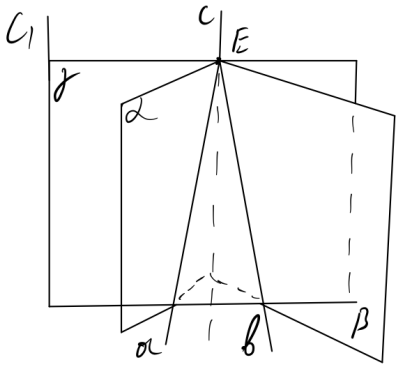


Доказательство. Пусть α – плоскость, a – не лежащая в ней прямая и a_1 – прямая в плоскости α, параллельная прямой a. Проведём плоскость α_1 через прямые a и a_1 (опр. 126). Она отлична от α, так как прямая a не лежит в плоскости α. Плоскости α и α_1 пересекаются по прямой a_1. Если бы прямая а пересекала плоскость α, то точка пересечения принадлежала бы прямой a_1. Но это невозможно так как прямые a и a_1 параллельны. Итак, прямая a не пересекает плоскость α, а значит, параллельна плоскости α (опр. 127). Теорема доказана.

Упражнение. Доказать существование параллельных прямой и плоскости.

Из теоремы 139 следует, что прямая может либо пересекать плоскость в одной точке, либо принадлежать плоскости, либо быть параллельной плоскости.

Теорема 140. Если прямая параллельна каждой из двух пересекающихся плоскостей, то она параллельна прямой их пересечения.
Доказательство. Пусть α и β – две данные пересекающиеся плоскости; c – прямая, по которой плоскости пересекаются; c_1 – прямая, параллельная каждой из пересекающихся плоскостей α и β. Требуется доказать, что прямые c и c_1 параллельны.

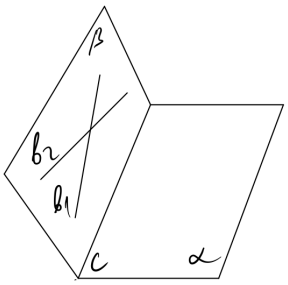


Проведём через прямую c_1 и какую-нибудь точку E прямой c плоскость γ. Плоскость γ пересекает плоскости α и β по прямым a и b, параллельным c_1 и проходящим через точку E (акс. C_2). Действительно, прямые a и b, будучи в плоскостях α и β, параллельных прямой c_1, не могут пересекать эту прямую. Поскольку прямые a и b лежат в плоскости γ и проходят через точку E, по аксиоме параллельных они совпадают. А так как прямая a лежит в плоскости α, а прямая b в плоскости β, то прямые a и b совпадают с прямой c, по которой плоскости α и β пересекаются. Итак, прямая c параллельна прямой c_1. Теорема доказана.

3. Параллельность плоскостей

Определение 128. Две плоскости называются *параллельными*, если они не пересекаются.

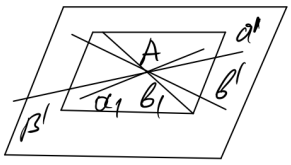
Теорема 141. Две плоскости параллельны, если одна из них параллельна двум пересекающимся прямым, лежащим в другой плоскости.
Доказательство. Пусть α и β – данные плоскости и b_1, b_2 – две пересекающиеся прямые в плоскости β, параллельные плоскости α. Плоскости α и β различны.

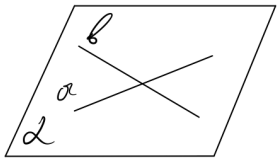


Допустим, что они пересекаются по некоторой прямой c (¬). Прямые b_1 и b_2 не пересекают плоскость α, следовательно, не пересекают прямую c этой плоскости. Но это невозможно по аксиоме параллельных, так как пересекающиеся прямые b_1, b_2 и прямая c лежат в одной плоскости – плоскости β ⊗. Теорема доказана.

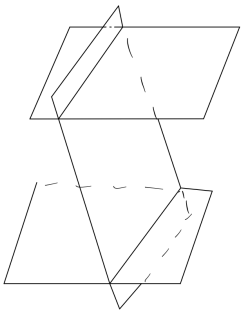
Теорема 142. Через точку вне данной плоскости можно провести плоскость, параллельную данной, и притом только одну.

Доказательство. Проведём в данной плоскости α какие-нибудь две пересекающиеся прямые a и b. Через данную точку A проведём параллельные им прямые a_1 и b_1 (т. 137), которые будут параллельны плоскости α (т. 139). Плоскость β, проходящая через прямые a_1 и b_1 (акс. C_3), по теореме 141 параллельна плоскости α.





Допустим, что через точку A проходит другая плоскость β', параллельная плоскости α (¬). Плоскость параллельных прямых a и a_1 пересекает плоскость β' по прямой a' (акс. C_2). Прямая a' не пересекает прямую a, так как прямая a лежит в плоскости α, а прямая a' в плоскости β', параллельной α. Поэтому прямая a' параллельна прямой a (опр. 126) и, значит, по аксиоме параллельных совпадает с прямой a_1. Плоскость параллельных прямых b и b_1 пересекает плоскость β' по прямой b'. Прямая b' не пересекает прямую b. Поэтому прямая b' параллельна прямой b, а значит, совпадает с прямой b_1. Так как по аксиоме C_3 через прямые a_1 и b_1 проходит только одна плоскость, то плоскость β' совпадает с плоскостью β ⊗. Теорема доказана.



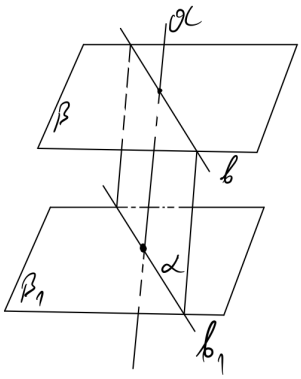
Теорема 143. Если две параллельные плоскости пересекаются третьей, то прямые пересечения параллельны.

Доказательство. Прямые пересечения с плоскостями лежат в одной плоскости и не пересекаются друг с другом, поскольку не пересекаются содержащие их параллельные плоскости. Значит, по определению 126 эти прямые параллельны. Теорема доказана.

4. Отрезки параллельных прямых между параллельными плоскостями

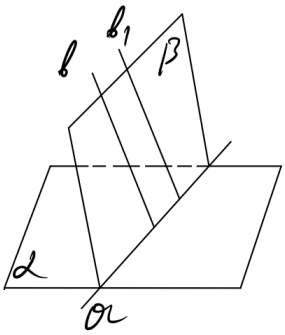
Теорема 144. Если прямая пересекает данную плоскость, то она пересекает любую плоскость, параллельную данной. Если плоскость пересекает данную прямую, то она пересекает любую прямую, параллельную данной.

Доказательство. Начнём с первого утверждения теоремы. Пусть a – прямая, пересекающая плоскость β, а β_1 – плоскость, параллельная β. Докажем, что прямая a пересекает плоскость β_1.



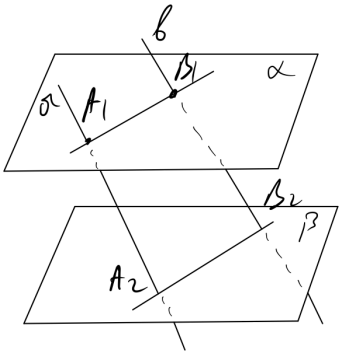
Проведём в плоскости β через точку пересечения с прямой a какую-нибудь прямую b и проведём через пересекающиеся прямые a и b плоскость α (акс. C_3). Так как через точку пересечения прямой a и плоскости β может проходить только одна плоскость, параллельна β_1 (т. 142), то плоскость α пересекает плоскость β_1 по прямой b_1.

Прямые b и b_1 параллельны (т. 143). Прямые a и b_1 лежат в плоскости α. Если бы прямая a не пересекала b_1, то эти прямые были бы параллельны. Но это противоречит аксиоме параллельных, поскольку через точку пересечения прямых a и b в плоскости α может проходить только одна прямая, параллельная b_1. Значит, прямая a пересекает прямую b_1, а вместе с ней и плоскость β_1. Первое утверждение теоремы доказано.



Докажем второе утверждение теоремы. Пусть плоскость α пересекает прямую b. Докажем, что она пересекает любую прямую b_1, параллельную b. Проведём через прямые b и b_1 плоскость β. Она пересекает плоскость α по прямой a (акс. C_2). Если бы плоскость α не пересекала бы прямую b_1, то прямые a и b были бы параллельны прямой b_1. Но это невозможно по аксиоме параллельных. Теорема доказана.

Теорема 145. Отрезки параллельных прямых, заключённые между параллельными плоскостями, равны.



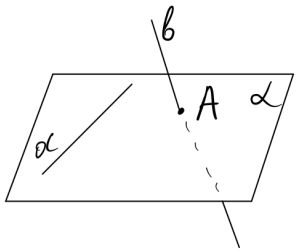
Доказательство. Пусть α и β – параллельные плоскости, a и b – пересекающие их параллельные прямые. Прямая a пересекает плоскости в точках A_1 и A_2, прямая b – в точках B_1 и B_2. Проведём через прямые a и b плоскость. Она пересекает плоскости α и β по параллельным прямым A_1B_1 и A_2B_2 (т. 143). Четырёхугольник $A_1B_1B_2A_2$ – параллелограмм, так как у него противолежащие стороны параллельны. Значит, отрезки A_1A_2 и B_1B_2 равны как противолежащие стороны параллелограмма. Теорема доказана.

5. Скрещивающиеся прямые

Определение 129. Две прямые называются *скрещивающимися*, если они не лежат в одной плоскости.

Теорема 146. Если одна из двух прямых лежит в некоторой плоскости, а другая прямая пересекает эту плоскость в точке, не лежащей на первой прямой, то эти прямые скрещивающиеся.

Доказательство. Пусть прямая a лежит в плоскости α и прямая b пересекает плоскость α в точке A, не лежащей на прямой a. Докажем, что прямые a и b не лежат в одной плоскости.

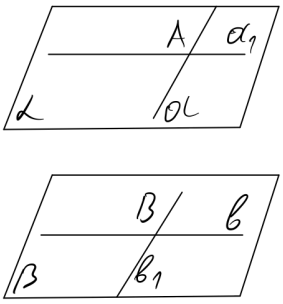


Действительно, если бы прямые a и b лежали бы в некоторой плоскости, то эта плоскость проходила бы через прямую a и точку A, а значит, совпадала бы с α (т. 132). Но это невозможно, поскольку прямая b не лежит в плоскости α. Значит, прямые a и b не лежат в одной плоскости и поэтому являются скрещивающимися (опр. 129). Теорема доказана.

Упражнение. Доказать существование скрещивающихся прямых.

Теорема 147. Любые две скрещивающиеся прямые лежат в параллельных плоскостях.

Доказательство. Пусть a и b – две скрещивающиеся прямые. Проведём через произвольную точку прямой a прямую a_1, параллельную прямой b, а через произвольную точку прямой b прямую b_1, параллельную прямой a. Проведём через прямые a и a_1 плоскость α, а через прямые b и b_1 плоскость β. Плоскости α и β различны, так как в противном случае прямые a и b лежали бы в одной плоскости. Плоскости α и β параллельны, так как прямые a и a_1 параллельны плоскости β (т. 139, 141). Теорема доказана.

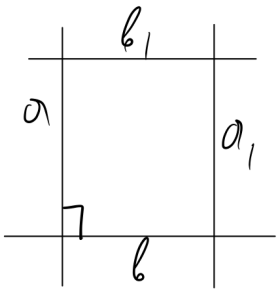


§23. Перпендикулярность прямых и плоскостей

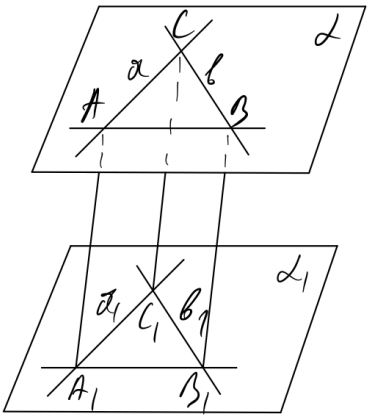
1. Перпендикулярность прямых

Теорема 148. Пересекающиеся прямые, параллельные пересекающимся перпендикулярным прямым, сами перпендикулярны.

Доказательство. Пусть a и b – перпендикулярные прямые, a_1 и b_1 – параллельные им пересекающиеся прямые. Докажем, что прямые a_1 и b_1 перпендикулярны. Пусть прямые a, b, a_1, b_1 лежат в одной плоскости. Тогда, прямая a, будучи перпендикулярна прямой b, будет перпендикулярна и прямой b_1, параллельной b (след. т. 46). Тогда прямая b_1, будучи перпендикулярна a, будет перпендикулярна и прямой a_1, параллельной a.



Теперь пусть параллельные прямые не лежат в одной плоскости. Тогда прямые a и b лежат в некоторой плоскости α, а прямые a_1 и b_1 в плоскости α_1 (акс. C_3). По теореме 139 прямые a и b параллельны плоскости α_1. По теореме 141 плоскости α и α_1 параллельны. Пусть C – точка пересечения прямых a и b, а C_1 – точка пересечения прямых a_1 и b_1. Проведём в плоскости параллельных прямых a и a_1 прямую, параллельную прямой CC_1. Она пересечёт прямые a и a_1 в



точках A и A_1. В плоскости прямых b и b_1 проведём прямую, параллельную CC_1, и обозначим B и B_1 её точки пересечения с прямыми b и b_1.

Прямые AA_1 и BB_1 параллельны, потому что каждая из них параллельна прямой CC_1. Плоскость параллельных прямых AA_1 и BB_1 пересекает параллельные плоскости α и α_1 по параллельным прямым AB и A_1B_1 (т. 143). Значит, четырёхугольник ABB_1A_1 является параллелограммом по определению. Четырёхугольники CAA_1C_1 и CBB_1C_1 тоже параллелограммы, так как у них противолежащие стороны параллельны.

Так как у параллелограмма противолежащие стороны равны, то $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $BC = B_1C_1$. По третьему признаку равенства треугольников треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны[1]. Следовательно, угол $A_1C_1B_1$ равен прямому углу ACB. Значит, прямые a_1 и b_1 перпендикулярны. Теорема доказана.

Определение 130. Две скрещивающиеся прямые называются *перпендикулярными*, если параллельные им пересекающиеся прямые перпендикулярны.

Из этого определения и теоремы 148 следует, что *каковы бы ни были перпендикулярные прямые (пересекающиеся или скрещивающиеся), параллельные им пересекающиеся прямые перпендикулярны.*

Теорема 149. Если прямая a перпендикулярна прямой b, то она перпендикулярна любой прямой b_1, параллельной b.
Доказательство. Проведём пересекающиеся прямые a_2 и b_2, параллельные прямым a и b соответственно. Прямые a_2 и b_2 перпендикулярны, так как перпендикулярны прямые a и b (т. 148 и опр. 130). По свойству параллельных прямых прямая b_2 параллельна b_1. Следовательно, прямые a и b_1 параллельны пересекающимся перпендикулярным прямым a_2 и b_2, а поэтому сами перпендикулярны. Теорема доказана.

2. Перпендикулярность прямой и плоскости

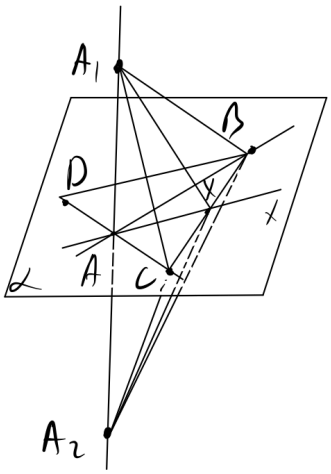
Определение 131. Прямая называется *перпендикулярной плоскости*, если она перпендикулярна любой прямой, лежащей в этой плоскости.

Если прямая a перпендикулярна плоскости α, то говорят также, что плоскость α перпендикулярна прямой a.

---

[1] Хотя третий признак равенства треугольников был доказан в планиметрии, при его доказательстве мы нигде не пользовались тем, что треугольники лежат в одной плоскости. Следовательно, его можно применять и к треугольникам, лежащим в разных плоскостях.

Теорема 150. Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна этой плоскости.
Доказательство. Пусть b и c – пересекающиеся прямые, лежащие в плоскости α и перпендикулярные прямой a. Обозначим через A точку пересечения прямых b и c. Рассмотрим сначала тот случай, когда прямая a проходит через точку A.



Проведём произвольную прямую x через точку A в плоскости α и покажем, что она перпендикулярна прямой a. Можно считать, что прямая x отлична от прямых b и c. Отметим на прямой c точки C и D по разные стороны от точки A, а на прямой b точку B, отличную от A. Прямая x пересекает сторону CD треугольника CDB, а следовательно, по теореме Паша пересекает в точке X одну из двух других сторон. Пусть, для определённости это будет сторона BC.

Отложим на прямой a из точки A в разные стороны от этой точки равные отрезки AA_1 и AA_2. Треугольник A_1CA_2 равнобедренный, так как отрезок AC является высотой по условию теоремы и медианой по построению. По той же причине треугольник A_1BA_2 тоже равнобедренный. Следовательно, треугольники A_1BC и A_2BC равны по третьему признаку равенства треугольников.

Из равенства треугольников A_1BC и A_2BC получается равенство углов A_1BX и A_2BX и, следовательно, равенство треугольников A_1BX и A_2BX по первому признаку равенства. Из равенства сторон A_1X и A_2X этих треугольников заключаем, что треугольник A_1XA_2 равнобедренный. Поэтому его медиана XA является также высотой. А это и значит, что прямая x перпендикулярна a.

Так как прямая a перпендикулярна произвольной прямой, проходящей через точку A, то она перпендикулярна любой прямой x_1, лежащей в плоскости α. Действительно, для такой прямой x_1 можно указать параллельную ей прямую x, проходящую через точку A. Перпендикулярность прямых a и x влечёт за собой перпендикулярность прямых a и x_1 по теореме 149. Итак, теорема доказана для того случая, когда прямая a проходит через точку пересечения прямых b и c.

Пусть теперь прямая a не проходит через точку A. Проведём через точку A прямую a_1, параллельную a. Прямая a_1 перпендикулярна прямым b и c по теореме 149. Следовательно, прямая a_1 перпендикулярна плоскости по доказанному. Это значит, что прямая a_1 перпендикулярна любой прямой x в плоскости α. По теореме 149 прямая a, будучи параллельна прямой a_1, тоже перпендикулярна каждой такой

прямой x. Следовательно, прямая a перпендикулярна плоскости α (опр. 131). Теорема доказана.

3. Свойства перпендикулярности прямой и плоскости

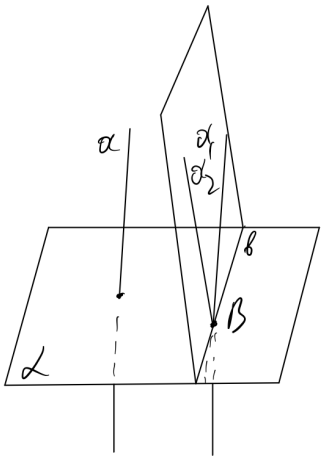
Теорема 151. Если прямая a и плоскость α перпендикулярны, то каждая прямая a_1, параллельная a, перпендикулярна плоскости α. Каждая плоскость α_1, параллельная плоскости α, перпендикулярна прямой a.

Доказательство. Прямая a перпендикулярна каждой прямой x, лежащей в плоскости α. По теореме 149 прямая a_1, будучи параллельна прямой a, также перпендикулярна каждой такой прямой x. Следовательно, прямая a_1 перпендикулярна плоскости α. Первое утверждение теоремы доказано.

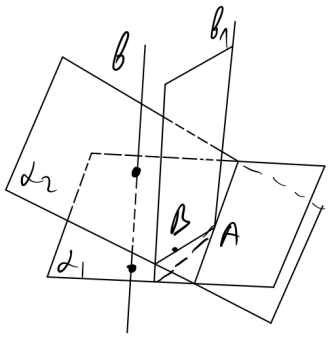
Докажем второе утверждение. Возьмём в плоскости α_1 произвольную прямую x_1. Проведём плоскость через x_1 и произвольную точку плоскости α. Проведённая плоскость пересечёт α по прямой x, параллельной x_1 (т. 143). Прямая a перпендикулярна прямой x, и следовательно, перпендикулярна параллельной ей прямой x_1 (т. 149). А это значит, что прямая a перпендикулярна плоскости α_1 (опр. 131). Теорема доказана.

Теорема 152. Две прямые, перпендикулярные одной плоскости параллельны. Две плоскости, перпендикулярные одной прямой, параллельны.

Доказательство. Пусть a и a_1 – прямые, перпендикулярные плоскости α. Допустим



прямая a_1 не параллельна a (¬). Проведём через точку пересечения прямой a_1 с плоскостью α прямую a_2, параллельную a. По теореме 151 прямая a_2 перпендикулярна плоскости α. Проведём через прямые a_1 и a_2 плоскость. Она пересечёт плоскость α по некоторой прямой b. Так как прямые a_1 и a_2 перпендикулярны плоскости α, то они перпендикулярны прямой b. А это невозможно (т. 31) ⊗. Первое утверждение теоремы доказано.

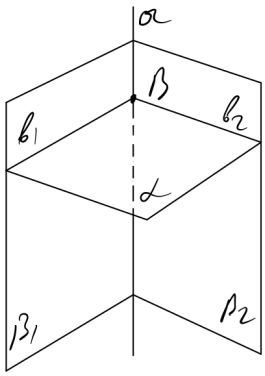


Докажем второе утверждение. Пусть α_1 и α_2 – две плоскости, перпендикулярные прямой b. Допустим, что плоскости α_1 и α_2 не параллельны и, следовательно, имеют общую точку A (¬). Проведём через точку A прямую b_1, параллельную прямой b. По теореме 151 прямая b_1 перпендикулярна плоскостям α_1 и α_2. Отметим на плоскости α_2 точку B, не лежащую в плоскости α_1, и проведём через прямую b_1 и точку B плоскость. Эта плоскость пересечёт плоскости α_1 и α_2 по двум различным прямым, перпендикулярным прямой b_1 и проходящим через точку A. А это невозможно (т. 31) ⊗. Теорема доказана.

4. Построение взаимно перпендикулярных плоскости и прямой

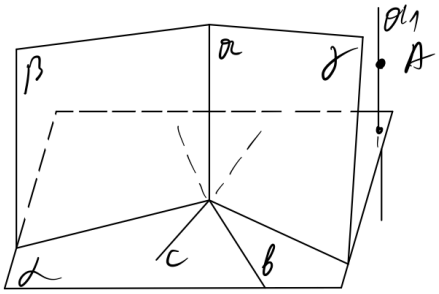
Теорема 153. Через данную точку к данной прямой можно провести и притом только одну перпендикулярную ей плоскость.

Доказательство. Пусть A – данная точка и a – данная прямая. Проведём через прямую a две различные плоскости β_1 и β_2. Через произвольную точку B прямой a проведём в плоскостях β_1 и β_2 прямые b_1 и b_2, перпендикулярные прямой a. Проведём через прямые b_1 и b_2 плоскость α. Прямая a перпендикулярна плоскости α, так как перпендикулярна двум пересекающимся прямым b_1 и b_2 в этой плоскости (т. 150). Проведём через точку A плоскость α_1, параллельную α. Плоскость α_1 перпендикулярна прямой a по теореме 151.



Единственность плоскости α_1, проходящей через точку A перпендикулярно прямой a, следует из теоремы 152, по которой две плоскости, перпендикулярные одной прямой, не могут иметь общую точку. Теорема доказана.

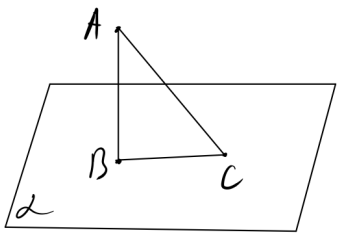
Теорема 154. Через данную точку к данной плоскости можно провести и притом только одну перпендикулярную прямую.



Доказательство. Пусть A – данная точка и α – данная плоскость. Проведём в плоскости α две пересекающиеся прямые b и c. Через их точку пересечения проведём плоскости β и γ, перпендикулярные прямым b и c соответственно (т. 153). Они пересекаются по некоторой прямой a. Прямая a перпендикулярна прямым b и c, а значит, и плоскости α. Проведём через точку A прямую a_1, параллельную a. По теореме 151 прямая a_1 перпендикулярна плоскости α.

Единственность прямой a_1, проходящей через точку A перпендикулярно плоскости α, следует из теоремы 152, по которой две прямые, перпендикулярные одной плоскости, не могут иметь общую точку. Теорема доказана.

5. Перпендикуляр и наклонная. Теорема о трёх перпендикулярах



Определение 132. Пусть α – плоскость, A – точка, не лежащая в плоскости α, и B – точка плоскости α. Отрезок AB называется *перпендикуляром*, проведённым из точки A к плоскости α, если прямая AB перпендикулярна плоскости α. Точка B называется *основанием перпендикуляра*. Пусть C – точка плоскости α, отличная от B. Отрезок AC называется *наклонной*, проведённой из точки A к

плоскости α. Точка C называется *основанием наклонной*. Отрезок BC называется *проекцией наклонной*.

Также иногда мы будем называть перпендикуляром прямую, перпендикулярную данной плоскости.

Теорема 155. Перпендикуляр короче любой наклонной, проведённой из этой точки к той же плоскости. Большая наклонная имеет большую проекцию.
Доказательство. Пусть AB – перпендикуляр и AC – наклонная, проведённые к плоскости α. Треугольник ABC – прямоугольный с прямым углом B (опр. 131 и 132), AC гипотенуза в этом треугольнике, следовательно наклонная AC больше перпендикуляра AB. По теореме Пифагора $AC^2 = AB^2 + BC^2$. Отсюда следует, что чем больше AC, тем больше BC, при неизменной длине AB. То есть, чем больше наклонная, тем больше её проекция. Теорема доказана.

Определение 133. *Расстоянием от точки до плоскости* называется длина перпендикуляра, опущенного из этой точки на плоскость.

Из теоремы 155 следует, что расстояние от точки до плоскости есть наименьшее из расстояний от этой точки до точек плоскости.

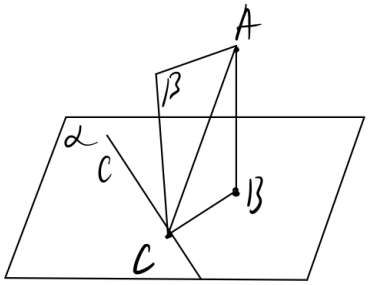
Теорема 156. Если α и β параллельные плоскости, то любые две точки плоскости α находятся на одном и том же расстоянии от плоскости β.
Доказательство. Пусть A_1 и A_2 – две различные точки плоскости α. Проведём из них перпендикуляры A_1B_1 и A_2B_2 к плоскости β. По теореме 152 прямые A_1B_1 и A_2B_2 параллельны, и следовательно, по теореме 145 отрезки A_1B_1 и A_2B_2 равны. Теорема доказана.

Теорема 156 означает, что параллельные плоскости являются равноотстоящими, как и параллельные прямые на плоскости. Расстояние от какой-нибудь точки плоскости α до параллельной ей плоскости β называют *расстоянием между параллельными плоскостями* α и β.

Аналогичное свойство имеет место для прямой и параллельной ей плоскости. *Все точки прямой, параллельной плоскости, находятся на одинаковом расстоянии от этой плоскости.* Действительно, пусть A_1B_1 и A_2B_2 перпендикуляры, опущенные из точек прямой A_1A_2 на плоскость α. Тогда четырёхугольник $A_1B_1B_2A_2$ – параллелограмм (по определению), и следовательно, $A_1B_1 = A_2B_2$.

Теорема 157 (теорема о трёх перпендикулярах). Прямая на плоскости, перпендикулярная проекции наклонной к этой плоскости, перпендикулярна и самой наклонной. И обратно, если прямая на плоскости перпендикулярна наклонной, то она перпендикулярна и проекции наклонной.

Доказательство. Пусть AB – перпендикуляр к плоскости α, AC – наклонная и c – прямая в плоскости α, перпендикулярная проекции BC. Проведём через точки A, B и C плоскость β. Прямая c перпендикулярна прямым AB и BC в плоскости β, следовательно, она перпендикулярна плоскости β (т. 150), а значит, и прямой AC.



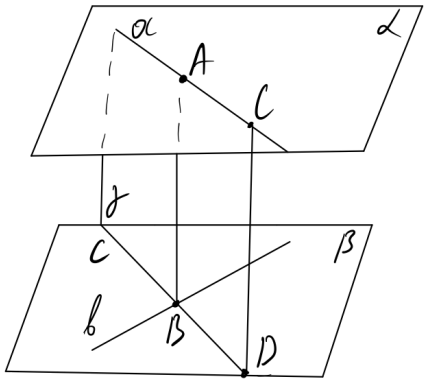
Аналогично, если прямая c перпендикулярна наклонной CA, то она, будучи перпендикулярна и прямой AB, перпендикулярна плоскости β, а значит, и проекции наклонной BC. Теорема доказана.

6. Расстояние между скрещивающимися прямыми

Определение 134. Пусть a и b – скрещивающиеся прямые, A и B – точки на этих прямых. Отрезок AB называется общим перпендикуляром скрещивающихся прямых a и b, если прямая AB перпендикулярна прямой a и прямой b.

Теорема 158. Две скрещивающиеся прямые имеют общий перпендикуляр, и притом только один.

Доказательство. Пусть a и b – данные скрещивающиеся прямые, лежащие в параллельных плоскостях α и β (т. 147). Проведём из произвольной точки C прямой a перпендикуляр CD к плоскости β. Через прямые a и CD проведём плоскость γ. Эта плоскость пересечёт плоскость β по прямой c, параллельной a (т. 143). Прямая c пересекает прямую b в некоторой точке B. В плоскости γ проведём через точку B прямую, параллельную CD. Эта прямая пересекает прямую a в точке A. Прямая AB перпендикулярна плоскости β (т. 151), а значит, и плоскости α. Из этого следует, что прямая AB перпендикулярна прямым a и b (опр. 131). Таким образом, отрезок AB есть общий перпендикуляр прямых a и b (опр. 134).



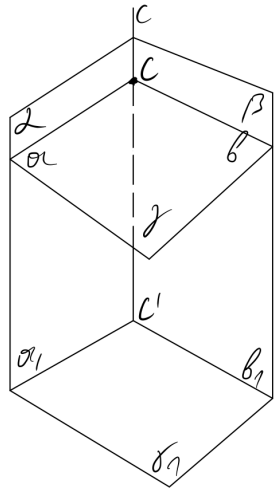
Докажем единственность общего перпендикуляра. Допустим, существует ещё один общий перпендикуляр A_1B_1 (¬). Прямая BD параллельна прямой a, следовательно, прямая A_1B_1 перпендикулярна BD (т. 149). Поэтому прямые AB и A_1B_1, будучи перпендикулярны прямым BD и b, перпендикулярны плоскости β. Значит, прямые AB и A_1B_1 параллельны (т. 152) и поэтому лежат в одной плоскости. Но тогда в этой плоскости лежат и прямые AA_1 и BB_1, совпадающие с прямыми a и b. А это невозможно, так как прямые a и b – скрещивающиеся ⊗. Теорема доказана.

Определение 135. *Расстоянием* между скрещивающимися прямыми называется длина их общего перпендикуляра.

Общий перпендикуляр скрещивающихся прямых является также общим перпендикуляром параллельных плоскостей, проходящих через эти прямые. Доказательство этого факта содержится во втором абзаце доказательства теоремы 158. *Расстояние между скрещивающимися прямыми равно расстоянию между параллельными плоскостями, проходящими через этих прямые, либо равно расстоянию от какой-нибудь точки одной из прямых до параллельной ей плоскости, содержащей вторую прямую.*

7. Перпендикулярность плоскостей

Определение 136. Пусть α и β – две плоскости, пересекающиеся по прямой c.



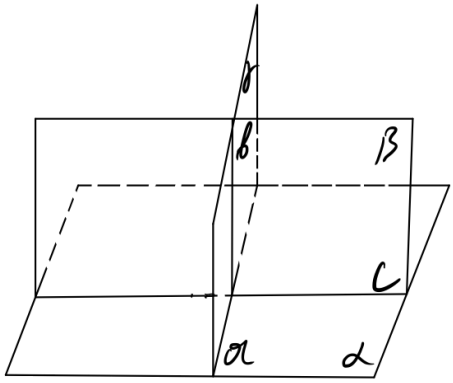
Плоскость γ перпендикулярна c и пересекает плоскости α и β по прямым a и b. Мы будем называть плоскости α и β *перпендикулярными*, если прямые a и b перпендикулярны.

Определяемая таким способом перпендикулярность плоскостей α и β не зависит от выбора плоскости γ.

Действительно, проведём плоскость γ_1, отличную от γ, перпендикулярную прямой c. Она пересечёт плоскости α и β по прямым a_1 и b_1. Плоскости γ и γ_1, будучи перпендикулярны прямой c, параллельны. Отсюда следует параллельность лежащих в одной плоскости прямых a и a_1, а также b и b_1. Тогда по теореме 148 перпендикулярность прямых a и b влечёт за собой перпендикулярность прямых a_1 и b_1.

Теорема 159. Если плоскость проходит через прямую, перпендикулярную другой плоскости, то эти плоскости перпендикулярны.

Доказательство. Пусть α – плоскость, b – перпендикулярная ей прямая, β –

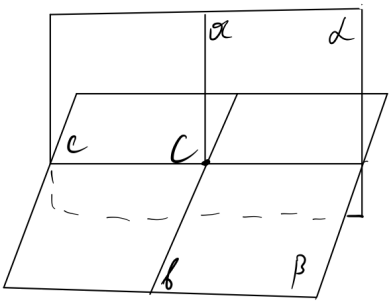


плоскость, проходящая через прямую b, и c – прямая по которой пересекаются плоскости α и β. Докажем, что плоскости α и β перпендикулярны. Проведём в плоскости α через точку пересечения прямой b с плоскостью α прямую a, перпендикулярную прямой c. Проведём через прямые a и b плоскость γ. Она перпендикулярна прямой c, так как прямая c перпендикулярна прямым a и b. Так как прямые a и b перпендикулярны, то плоскости α и β

перпендикулярны. Теорема доказана.

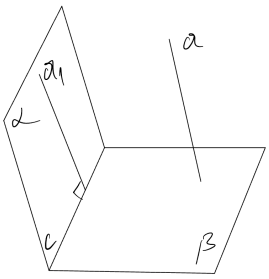
Теорема 160. Если в одной из двух перпендикулярных плоскостей провести прямую, перпендикулярную их прямой пересечения, то она будет перпендикулярна другой плоскости.

Доказательство. Пусть α и β – данные перпендикулярные плоскости, пересекающиеся по прямой c, и a – прямая в плоскости α, перпендикулярная c и пересекающая её в точке C. Докажем, что прямая a перпендикулярна плоскости β. Через точку C проведём прямую b в плоскости β, перпендикулярную прямой c. Плоскость γ, проходящая через прямые a и b, перпендикулярна прямой c, так как лежащие в ней прямые a и b перпендикулярны c. Так как плоскости α и β перпендикулярны, то прямые a и b перпендикулярны. Кроме того, прямые a и c перпендикулярны (по условию), поэтому прямая a перпендикулярна плоскости β. Теорема доказана.



Теорема 161. Если прямая a и плоскость α перпендикулярны плоскости β, то либо прямая a лежит в плоскости α, либо параллельна плоскости α.

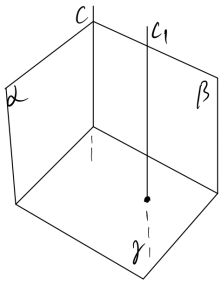
Доказательство. Пусть c – прямая, по которой пересекаются плоскости α и β. Проведём в плоскости α прямую a_1, перпендикулярную прямой c. Прямая a_1 перпендикулярна плоскости β (т. 160), следовательно, прямая a_1 параллельна прямой a по теореме 152. Если прямая a не лежит в плоскости α, то по теореме 139 она параллельна плоскости α, так как параллельна прямой a_1, лежащей в этой плоскости. Теорема доказана.



Из теоремы 161 следует, что *перпендикуляр, проведённый из любой точки плоскости α к перпендикулярной ей плоскости β, лежит в плоскости α.*

Теорема 162. Пусть α и β – две различные пересекающиеся плоскости и γ – плоскость, перпендикулярная каждой из плоскостей α и β. Тогда плоскость γ перпендикулярна прямой c, по которой плоскости α и β пересекаются.

Доказательство. Через точку, не лежащую ни в плоскости α, ни в плоскости β, проведём прямую c_1, перпендикулярную плоскости γ. По теореме 161 прямая c_1 параллельна плоскостям α и β. Следовательно, по теореме 140 прямая c_1 параллельна прямой c. Тогда по теореме 151 прямая c перпендикулярна плоскости γ. Теорема доказана.



Теорема 163. Пусть α – плоскость и a – не перпендикулярная к ней прямая. Тогда через прямую a можно провести и притом только одну плоскость, перпендикулярную плоскости α.
Доказательство. Проведём через произвольную точку прямой a прямую a_1, перпендикулярную плоскости α (т. 154). Плоскость β, проходящая через прямые a и a_1, перпендикулярна плоскости α по теореме 159.

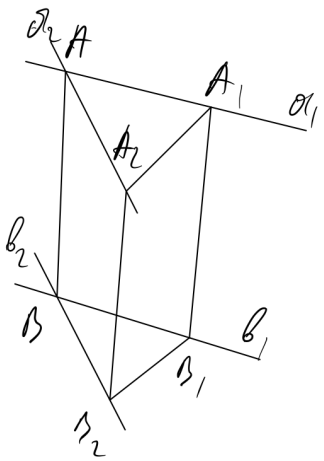
Допустим, что через прямую a проходит другая плоскость β_1, перпендикулярная плоскости α (¬). По теореме 161 прямая a_1 лежит в плоскости β_1. Но тогда по аксиоме C_3 плоскости β и β_1 совпадают ⊗. Теорема доказана.

§24. Углы между прямыми и плоскостями

1. Угол между прямыми

Определение 137. *Углом между пересекающимися прямыми* называют значение угловой меры двух меньших равных углов из четырёх неразвёрнутых углов, образованных лучами прямых с началом в точке пересечения. *Угол между перпендикулярными* прямыми равен 90°. *Угол между параллельными прямыми* равен 0.

Лемма 22. Угол между пересекающимися прямыми b_1 и b_2 равен углу между соответственно параллельными им пересекающимися прямыми a_1 и a_2.
Доказательство. Пусть A – точка пересечения прямых a_1 и a_2, B – точка пересечения прямых b_1 и b_2. Допустим, прямые a_1, a_2, b_1, b_2 не лежат в одной плоскости. Тогда плоскости в которых лежат прямые a_1, a_2 и b_1, b_2 параллельны. Отметим на прямых a_1 и a_2 точки A_1 и A_2 и проведём прямые A_1B_1 и A_2B_2, параллельные прямой AB. Четырёхугольники AA_1B_1B и AA_2B_2B – параллелограммы, так как у них противолежащие стороны параллельны. Четырёхугольник $A_1B_1B_2A_2$ тоже параллелограмм. У него стороны A_1B_1 и A_2B_2 параллельны, потому что каждая из них параллельна прямой AB. Следовательно, весь четырёхугольник лежит в плоскости параллельных прямых A_1B_1 и A_2B_2, из чего получаем параллельность A_1A_2 и B_1B_2 (т. 143).



По свойству параллелограмма имеем $AA_1 = BB_1$, $AA_2 = BB_2$, $A_1A_2 = B_1B_2$. Следовательно, по третьему признаку равенства треугольники AA_1A_2 и BB_1B_2 равны. Из равенства треугольников следует равенство их углов A и B, а значит, и равенство углов между прямыми a_1, a_2 и b_1, b_2.

В случае, если прямые a_1, a_2, b_1, b_2 лежат в одной плоскости, возьмём параллельные им прямые c_1 и c_2, не лежащие в этой плоскости. Тогда, по

доказанному, углы между прямыми a_1 и a_2, b_1 и b_2 равны углу между прямыми c_1 и c_2, а следовательно, равны между собой. Лемма доказана.

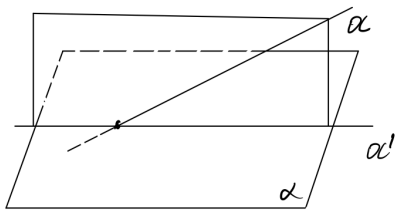
Определение 138. *Углом между скрещивающимися прямыми* называется угол между параллельными им пересекающимися прямыми.

Из леммы 22 следует, что угол между скрещивающимися прямыми не зависит от того, какие взяты пересекающиеся прямые.

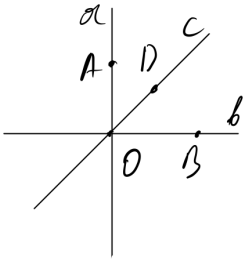
Теорема 163. Пусть a_1 и a_2 – две прямые, b_1 и b_2 – параллельные им прямые. Тогда угол между прямыми a_1 и a_2 равен углу между прямыми b_1 и b_2.
Доказательство. Если прямые a_1 и a_2 параллельны, то прямые b_1 и b_2 тоже параллельны. Тогда углы между ними равны нулю для каждой пары прямых, и следовательно, равны друг другу. Равенство углов в случае пересекающихся прямых доказано в лемме 22. В случае скрещивающихся прямых равенство углов следует из определения 138. Теорема доказана.

2. Угол между прямой и плоскостью

Определение 139. Пусть α – плоскость и a – пересекающая её, но не перпендикулярная ей прямая. Плоскость, проходящая через прямую a, перпендикулярно α, пересекает плоскость α по прямой a'. Эта прямая называется *проекцией* прямой a на плоскость α. *Углом между прямой и плоскостью* называется угол между этой прямой и её проекцией на эту плоскость. Если прямая параллельна плоскости или лежит в этой плоскости, то угол между ними считается равным нулю. Угол между перпендикулярными прямой и плоскостью равен 90°.

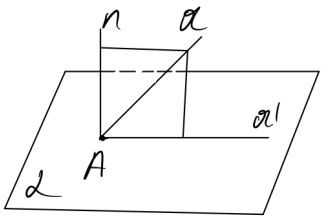


Лемма 23. Пусть a и b – две пересекающиеся перпендикулярные прямые. Прямая c лежит в плоскости прямых a и b и проходит через их точку пересечения. Тогда углы, которые образует прямая c с прямыми a и b, дополняют друг друга до 90°.
Доказательство. Отметим на прямой c точку D, отличную от точки пересечения прямых a и b. На прямой a отметим точку A, лежащую в полуплоскости точки D относительно прямой b. На прямой b отметим точку B, лежащую в полуплоскости точки D относительно прямой a. Лучи OD и OA отложены в одну полуплоскость относительно прямой b, следовательно, либо луч OD проходит между лучами OB и OA, либо луч OA проходит между лучами OB и OD. Допустим, что луч OA проходит между лучами OB и OD (¬). Тогда угол DOB больше 90°. Лучи OD и OB отложены в одну полуплоскость относительно прямой a. Поскольку угол DOB больше 90°, а угол AOB равен 90°, получаем, что луч OB проходит между лучами



OA и *OD*. Но это невозможно, поскольку лучи *OA* и *OD* отложены в одну полуплоскость относительно *OB* ⊗. Значит, луч *OD* проходит между лучами *OA* и *OB*. Поэтому углы *AOD* и *BOD* в сумме равны углу *AOB*, то есть 90°. Каждый из углов *AOD* и *BOD* меньше 90°, следовательно, эти углы являются углами между прямой *c* и прямыми *a* и *b* соответственно (опр. 137). Лемма доказана.

Теорема 164. Угол между прямой и плоскостью дополняет до 90° угол между этой прямой и перпендикуляром к плоскости.
Доказательство. Обозначим данную прямую *a*, а данную плоскость – *α*. Если прямая *a* лежит в плоскости *α* или параллельна этой плоскости, то угол между *a* и *α* равен нулю. Если прямая *a* параллельна *α*, проведём через прямую *a* плоскость, не параллельную *α*. Она пересечёт *α* по прямой *c*, параллельной *a*. Угол между перпендикуляром к *α* и прямой *c* равен 90°, следовательно, угол между прямой *a* и перпендикуляром к плоскости *α* тоже равен 90°. Таким образом, утверждение теоремы выполняется.



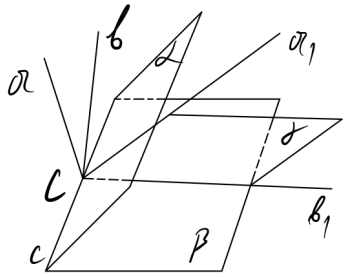
Рассмотрим общий случай. Пусть прямая *a* пересекает плоскость *α* в точке *A*. Проведём через точку *A* прямую *n*, перпендикулярную плоскости *α*. Плоскость прямых *n* и *a* пересекает *α* по прямой *a*', являющейся проекцией прямой *a* на плоскость *α*. Прямые *n* и *a*' перпендикулярны, поэтому углы между прямыми *a* и *a*', *a* и *n* дополняют друг друга до 90° (лемма 23), из чего непосредственно следует утверждение теоремы (опр. 139). Теорема доказана.

Теорема 165. Пусть *a* и *b* – параллельные прямые, *α* и *β* – параллельные плоскости. Тогда угол между прямой *a* и плоскостью *α* равен углу между прямой *b* и плоскостью *β*.
Доказательство. Пусть *a*' и *b*' – прямые, перпендикулярные плоскостям *α* и *β* соответственно. Тогда прямые *a*' и *b*' параллельны (т. 152). По теореме 163 углы между прямыми *a* и *a*', *b* и *b*' равны. Следовательно, дополняющие их до 90° углы тоже равны. По теореме 164 отсюда заключаем о равенстве углов между прямой *a* и плоскостью *α*, прямой *b* и плоскостью *β*. Теорема доказана.

3. Угол между плоскостями

Определение 140. Пусть даны две пересекающиеся плоскости *α* и *β*. Проведём плоскость, перпендикулярную их прямой пересечения. Она пересекает данные плоскости по двум прямым. *Углом между плоскостями α* и *β* называется угол между построенными прямыми. Угол между параллельными плоскостями считается равным нулю.

Угол между плоскостями не зависит от выбора секущей плоскости. Действительно, пусть плоскости *α* и *β* пересекаются по прямой *c*. Плоскость *γ*, перпендикулярная



прямой c, пересекает плоскости α и β по прямым a и b. Другая плоскость γ', также перпендикулярная прямой c, пересекает плоскости α и β по прямым a' и b'. Плоскости γ и γ' параллельны, следовательно, прямые a и a', а также b и b', тоже параллельны (поскольку лежат в одной плоскости и не пересекаются). Следовательно, угол между прямыми a и b равен углу между прямыми a' и b'.

Теорема 166. Угол между плоскостями равен углу между перпендикулярами к этим плоскостям.
Доказательство. Пусть α и β – данные плоскости, a и b – перпендикулярные им прямые. Если плоскости α и β параллельны, то прямые a и b тоже параллельны. В этом случае угол между плоскостями и угол между прямыми равны нулю, и следовательно, равны друг другу.

Пусть плоскости α и β пересекаются по некоторой прямой c. Проведём плоскость γ, перпендикулярную прямой c. Она пересечёт плоскости α и β по прямым a_1 и b_1, а прямую c в точке C. Проведём через точку C прямые a и b, перпендикулярные плоскостям α и β. Так как прямые a и b перпендикулярны прямой c, плоскость прямых a и b перпендикулярна c, и поскольку эта плоскость не может быть параллельна плоскости γ, она совпадает с γ (т. 152).

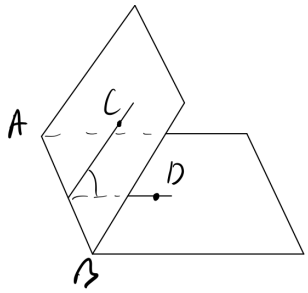
Угол между прямыми a_1 и b_1 дополняет до 90° угол между прямыми a_1 и b (лемма 23), угол между прямыми a и b дополняет до 90° угол между прямыми a_1 и b. Следовательно, угол между прямыми a_1 и b_1 равен углу между прямыми a и b. Отсюда непосредственно следует утверждение теоремы (опр. 140). Теорема доказана.

Теорема 167. Угол между плоскостями равен углу между параллельными им плоскостями.
Доказательство. Пусть плоскость α параллельна плоскости α_1, а плоскость β параллельна плоскости β_1. Проведём прямую a, перпендикулярную плоскости α. Эта прямая перпендикулярна плоскости α_1. Аналогично прямая b, перпендикулярная плоскости β, перпендикулярная плоскости β_1. По теореме 166 угол между двумя плоскостями равен углу между перпендикулярами к этим плоскостям. Следовательно, угол между плоскостями α и β и угол между плоскостями α_1 и β_1 равны одному и тому же значению – углу между прямыми a и b. Теорема доказана.

§25. Двугранные, трёхгранные и многогранные углы

1. Определение двугранного и трёхгранного углов

Определение 141. *Двугранным углом* называется фигура, образованная двумя полуплоскостями с общей задающей их прямой. Полуплоскости называются *гранями*, а ограничивающая их прямая – *ребром* двугранного угла.



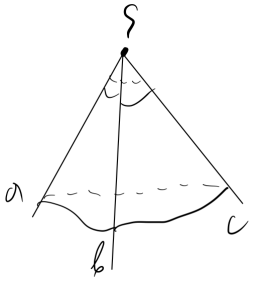
Плоскость, перпендикулярная ребру двугранного угла, пересекает его грани по двум полупрямым. Угол, образованный этими полупрямыми, называется *линейным углом двугранного угла*. *За меру двугранного угла принимается мера соответствующего ему линейного угла.* Все линейные углы двугранного угла равны, поэтому мера двугранного угла не зависит от выбора линейного угла.

Двугранный угол с ребром *AB*, на разных гранях которого отмечены точки *C* и *D*, называется двугранным углом *CABD*.

Замечание. В отличии от угла между плоскостями, который не может превышать 90°, двугранный угол может иметь любое значение от 0° до 180°.

Определение 142. Фигура, образованная углом и всеми лучами, проходящими между сторонами этого угла, называется *плоским углом*.

Определение 143. Пусть *a, b, c* – три полупрямые, исходящие из точки *S*, не лежащие в одной плоскости. Полупрямые *a, b, c* образуют три плоских угла: (*ab*), (*ac*), (*bc*). Фигура, составленная из этих трёх плоских углов, называется *трёхграным углом*. Точка *S* называется вершиной трёхгранного угла, полупрямые *a, b, c* называются *рёбрами*, а сами плоские углы – *гранями*.



Плоскости углов (*ab*) и (*ac*) пересекаются по прямой, содержащей полупрямую *a*. Полуплоскости этих плоскостей, содержащие полупрямые *b* и *c*, образуют двугранный угол. Этот угол называется *двугранным углом трёхгранного угла при ребре a*. Его называют также *двугранным углом, противолежащим плоскому углу (bc).*

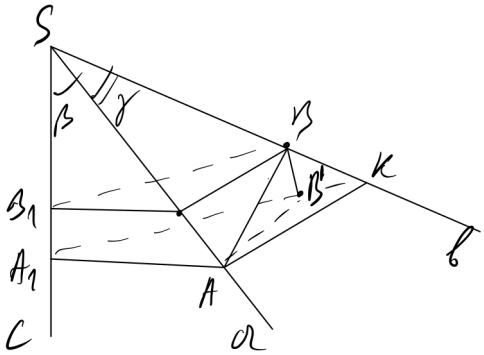
Если *A, B, C* – точки, лежащие на рёбрах трёхгранного угла с вершиной *S*, то этот угол обозначается *SABC*.

2. Теоремы косинусов и синусов для трёхгранного угла

Теорема 168. Пусть α, β, γ – плоские углы трёхгранного угла и *C* – двугранный угол, противолежащий плоскому углу γ. Тогда

$$\cos\gamma = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\cos C.$$

<u>Доказательство</u>. Пусть S – вершина трёхгранного угла, a, b, c – его рёбра, α, β, γ – плоские углы, образованные рёбрами b и c, c и a, a и b соответственно, C – двугранный угол при ребре c, то есть двугранный угол, противолежащий плоскому углу γ. Отложим на рёбрах a и b угла отрезки SA и SB единичной длины. По теореме косинусов в применении к треугольнику ASB будем иметь



$$AB^2 = SA^2 + SB^2 - 2SA\cdot SB\cdot\cos\gamma = 2 - 2\cos\gamma.$$

Теперь вычислим длину отрезка AB другим способом. Сначала рассмотрим случай, когда углы α и β не равны друг другу и не равны 90°. Для этого проведём через точки A и B плоскости, перпендикулярные ребру c. Они пересекут это ребро или его продолжение в точках A_1 и B_1. Поскольку эти плоскости параллельны, их прямые A_1K и B_1B, лежащие в плоскости SB_1B, тоже параллельны. Пусть B' – основание перпендикуляра, опущенного из точки B на проведённую через точку A плоскость. Плоскость SB_1B перпендикулярна плоскости A_1AK, следовательно, прямая BB' лежит в плоскости SB_1B (след. т. 161). Значит, точка B', являющаяся точкой пересечения прямой BB' и плоскости A_1AK, принадлежит прямой A_1K. $BB'A_1B_1$ – прямоугольник, поэтому $A_1B' = BB_1$, $BB' = A_1B_1$. По теореме косинусов из треугольника AA_1B' имеем

$$AB'^2 = AA_1^2 + A_1B'^2 - 2AA_1\cdot A_1B'\cdot\cos C,$$

$$AA_1 = \sin\beta,\ A_1B' = BB_1 = \sin\alpha,$$

$$AB'^2 = \sin^2\alpha + \sin^2\beta - 2\sin\alpha\sin\beta\cos C.$$

Из прямоугольного треугольника ABB' по теореме Пифагора получаем

$$AB^2 = AB'^2 + BB'^2.$$

Вычислим $BB' = A_1B_1$. Введём на прямой, содержащей полупрямую c, систему координат с началом в точке S и положительной полупрямой c. Тогда, с учётом того, что $SA = SB = 1$, координаты точек A_1 и B_1 будут равны $\cos\alpha$ и $\cos\beta$. Значит,

$$BB' = A_1B_1 = |\cos\alpha - \cos\beta| \text{ (т. 17)}.$$

$$AB^2 = \sin^2\alpha + \sin^2\beta - 2\sin\alpha\sin\beta\cos C + (\cos\alpha - \cos\beta)^2 =$$
$$= 2 - 2\sin\alpha\sin\beta\cos C - 2\cos\alpha\cos\beta.$$

Приравнивая полученные выражения для AB^2 получаем, что

$$\cos\gamma = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\cos C.$$

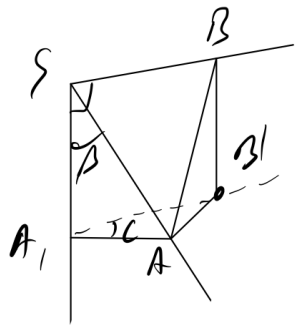
Пусть углы α и β равны. Тогда плоскости, проведённые через точки A и B перпендикулярно ребру c, совпадают. Из теоремы косинусов, применённой к треугольнику AA_1B, имеем: $AB^2 = \sin^2\alpha + \sin^2\beta - 2\sin\alpha\sin\beta\cos C$. Приравнивая полученные выражения для AB^2 получаем, что

$$-2\cos\gamma = -\cos^2\alpha - \cos^2\beta - 2\sin\alpha\sin\beta\cos C,$$

откуда, с учётом того, что $\cos\alpha = \cos\beta$, следует, что

$$\cos\gamma = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\cos C.$$

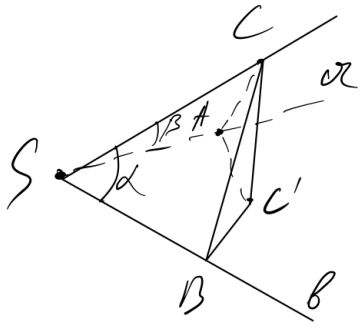
Теперь рассмотрим случай, когда хотя бы одни из углов α или β равен 90°. Пусть $\alpha = 90°$, а $\beta \neq 90°$. Тогда точка B_1 совпадает с S, в остальном доказательство не изменяется. Если $\alpha \neq 90°$, а $\beta = 90°$, то уже точка A_1 совпадает с S. Если $\alpha = 90°$ и $\beta = 90°$, то угол (ab) является линейным углом двугранного угла при ребре c, поэтому $\cos\gamma = \cos C$. Поскольку при этом $\cos\alpha = \cos\beta = 0$, $\sin\alpha = \sin\beta = 1$, доказываемое равенство выполняется. Теорема доказана.



<u>Теорема 169</u>. Пусть α, β, γ – плоские углы трёхгранного угла, а A, B, C – противолежащие им двугранные углы. Тогда

$$\frac{\sin\alpha}{\sin A} = \frac{\sin\beta}{\sin B} = \frac{\sin\gamma}{\sin C}.$$

<u>Доказательство</u>. Сначала рассмотрим случай, когда углы α и β не равны 90°. Отложим на ребре c трёхгранного угла отрезок SC единичной длины. Опустим из точки C перпендикуляр CC' на плоскость угла (ab). Проведём перпендикуляры $C'A$ и $C'B$ к прямым, содержащим рёбра a и b. Тогда по теореме о трёх перпендикулярах прямые CA и CB также перпендикулярны a и b.



Вычислим длину перпендикуляра CC'. Из прямоугольного треугольника SCB с прямым углом B получим $CB = SC\sin\alpha = \sin\alpha$. Теперь из прямоугольного треугольника CBC' с прямым углом C' находим длину перпендикуляра CC':

$$CC' = CB\sin B = \sin\alpha\sin B.$$

Длину перпендикуляра CC' можно найти иначе, используя при этом прямоугольные треугольники ACS и CAC'. При этом получается, что

$$CC' = \sin\beta\sin A.$$

Сравнивая выражения для отрезка CC', находим, что $\sin\alpha\sin B = \sin\beta\sin A$. Отсюда

$$\frac{\sin\alpha}{\sin A} = \frac{\sin\beta}{\sin B}.$$

Если $\alpha = 90°$, а $\beta \neq 90°$, то точка B совпадает с S, то есть $SB = 0$, $\sin\alpha = 1$, в остальном доказательство не изменяется. Если $\alpha = 90°$, $\beta = 90°$, то двугранные углы

при рёбрах a и b равны 90°, поэтому $\sin \alpha = \sin A = \sin \beta = \sin B$ и отношение выполняется.

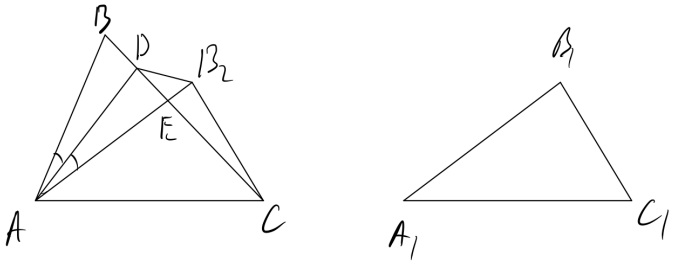
Аналогично доказывается соотношение

$$\frac{\sin \beta}{\sin B} = \frac{\sin \gamma}{\sin C}.$$

Теорема доказана.

3. Неравенство для плоских углов трёхгранного угла

Лемма 24. Если две стороны одного треугольника соответственно равны двум сторонам другого треугольника, то против большего из углов, заключённых между ними, лежит большая сторона, и обратно, против большей из неравных сторон лежит больший угол.

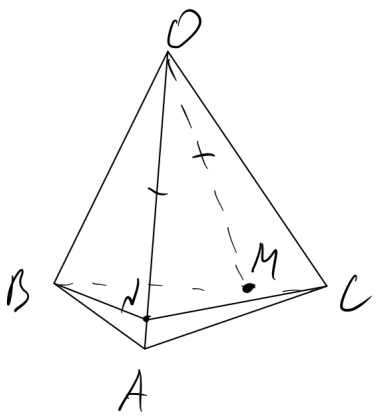


Доказательство. Пусть ABC и $A_1B_1C_1$ – данные треугольники, $AC = A_1C_1$, $AB = A_1B_1$, $\angle A > \angle A_1$. Отложим от луча AC угол, равный углу A_1 и отложим на стороне этого угла отрезок AB_2, равный A_1B_1. Так как $\angle A_1 < \angle BAC$, то луч AB_2 пройдёт между сторонами угла BAC, и следовательно, пересечёт BC в некоторой точке E. Проведём биссектрису AD в треугольнике BAE. Треугольник BAD равен треугольнику B_2AD по первому признаку, следовательно, $BD = DB_2$. Заметим, что точка E принадлежит отрезку BC, а точка D – отрезку BE, следовательно точка D тоже принадлежит отрезку BC (т. 15) и $BC = BD + DC$. Из треугольника DCB_2 получаем, что $B_2C < B_2D + DC = BD + DC = BC$. Следовательно, $B_1C_1 < BC$.

Докажем обратное утверждение. Пусть $BC > B_1C_1$. Допустим, что углы A и A_1 равны, тогда равны и содержащие их треугольники, значит $BC = B_1C_1$, что противоречит условию. Если $\angle A < \angle A_1$, то по доказанному $BC < B_1C_1$, что также противоречит условию. Следовательно, $\angle A > \angle A_1$. Лемма доказана.

Теорема 170. У трёхгранного угла каждый плоский угол меньше суммы двух других плоских углов.

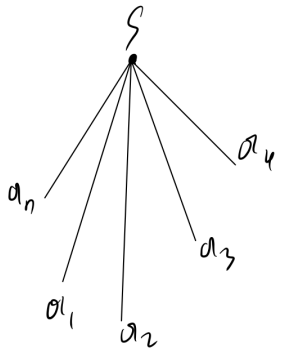
Доказательство. Пусть $OABC$ – данный трёхгранный угол. Для определённости будем считать, что $\angle BOC \geq \angle AOC \geq \angle AOB$. Докажем, что $\angle BOC < \angle AOB + \angle AOC$. Если $\angle BOC = \angle AOB$, то неравенство выполняется. Будем считать, что $\angle BOC > \angle AOB$.



Отложим от полупрямой OB в полуплоскость точки C угол BOM, равный углу AOB. Поскольку $\angle BOC > \angle AOB$, точка M будет лежать между точками B и C. На луче OA отложим отрезок $ON = OM$. Треугольники BON и BOM равны по первому признаку равенства треугольников, поэтому $BN = BM$.

В треугольнике BCN имеем: $BM + MC = BC < BN + NC = BM + NC$, откуда $MC < NC$. Тогда $\angle MOC < \angle NOC$ (лемма 24). Получаем, что $\angle BOC = \angle MOB + \angle MOC = \angle AOB + \angle MOC < \angle AOB + \angle NOC = \angle AOB + \angle AOC$. Теорема доказана.

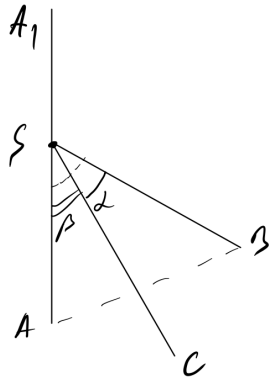
4. Многогранные углы



<u>Определение 144</u>. Пусть из точки S исходят полупрямые $a_1, a_2, \ldots, a_n$, причём никакие три последовательные полупрямые (a_1, a_2, a_3), (a_2, a_3, a_4), …, (a_n, a_1, a_2), не лежат в одной плоскости. Фигура, составленная из плоских углов (a_1a_2), (a_2a_3), …, (a_na_1), называется *многогранным углом*. Точка S называется *вершиной* многогранного угла, а полупрямые $a_1, a_2, \ldots, a_n$ его *рёбрами*. Многогранный угол называется *выпуклым*, если он расположен по одну сторону плоскости любого его плоского угла.

Трёхгранный угол является многогранным углом, а двугранный угол – нет.

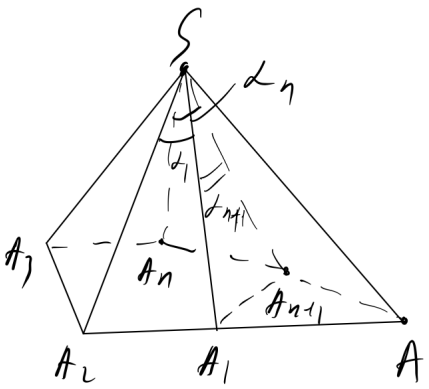
<u>Теорема 171</u>. У выпуклого многогранного угла сумма плоских углов меньше 360°.
<u>Доказательство</u>. Проведём доказательство методом математической индукции.



Для этого сначала докажем утверждение для трёхгранного угла. Рассмотрим трёхгранный угол $SABC$ с плоскими углами α, β, γ. Проведём луч SA_1, дополнительный SA. Тогда, величины плоских углов трёхгранного угла SA_1BC равны: α, $180° - \beta$, $180° - \gamma$. По теореме 170 $\alpha < (180° - \beta) + (180° - \gamma)$, откуда $\alpha + \beta + \gamma < 360°$.

Теперь предположим, что утверждение теоремы выполняется для n-гранного угла и докажем, что в этом случае оно верно и для $(n+1)$-гранного угла.

Пусть дан $(n+1)$-гранный угол $SA_1A_2\ldots A_{n+1}$ с плоскими углами $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \alpha_{n+1}$. Плоскости углов α_1 и α_n имеют общую точку S, поэтому они пересекаются по прямой a, проходящей через S. Точка S разбивает прямую a на два луча. Один из



этих лучей и рассматриваемый многогранный угол лежат по разные стороны от плоскости угла α_{n+1}. Обозначим этот луч SA. Поскольку SA не проходит через полупространство многогранного угла, он не разделяет лучи SA_1 и SA_2, следовательно, SA_1 проходит между сторонами угла A_2SA в плоскости угла α_1. Аналогично луч SA_{n+1} проходит между сторонами угла A_nSA в плоскости угла α_n. Рассмотрим выпуклый n-гранный угол $SAA_2\ldots A_n$. Величины его плоских углов: ($\angle ASA_1 + \alpha_1$), α_2, α_3, …, α_{n-1}, ($\alpha_n + \angle A_{n+1}SA$). По предположению для этого n-гранного угла теорема верна, поэтому ($\angle ASA_1 + \alpha_1$) + $\alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_{n-1}$ + ($\alpha_n + \angle A_{n+1}SA$) < 360°, или $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$ + ($\angle ASA_1 + \angle A_{n+1}SA$) < 360°. Но по теореме 170 для трёхгранного угла SAA_1A_{n+1} имеем $\angle ASA_1 + \angle A_{n+1}SA > \alpha_{n+1}$, тогда тем более выполнено $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n + \alpha_{n+1} < 360°$.

Из выполнения утверждения теоремы для трёхгранного угла и того, что из выполнения теоремы для n-гранного угла, следует её выполнение для (n+1)-гранного угла, получаем верность теоремы для любого выпуклого многогранного угла. Теорема доказана.

§26. Движение и другие преобразования пространства

1. Движение и его свойства

Определение движения в пространстве аналогично определению движения на плоскости. Именно, под *движением* мы понимаем взаимно однозначное отображение (преобразование) пространства на себя, сохраняющее расстояние между точками. При этом полностью сохраняется доказательство теоремы 62, поэтому *при движении прямые переходят в прямые и сохраняется порядок точек на прямой.*

Теорема 172. При движении в пространстве плоскости переходят в плоскости.
Доказательство. Пусть α – плоскость и A, B, C – три её точки, не лежащие на одной прямой. При движении эти точки перейдут в точки A', B', C', также не лежащие на одной прямой (иначе расстояние между ними должно было бы измениться). Пусть α' – плоскость, проходящая через точки A', B', C'. Покажем, что плоскость α при рассматриваемом движении переходит в плоскость α'.

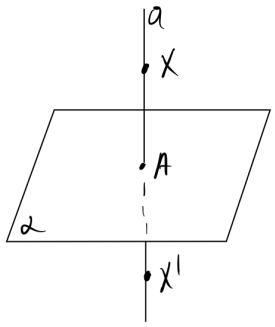
Пусть X – произвольная точка плоскости α. Выберем некоторую точку P на сторонах треугольника ABC и проведём прямую XP. Она пересечёт треугольник ABC ещё хотя бы в одной точке Q (которая, в отличии от точки P, может совпадать с одной из вершин треугольника, см. т. 7). Точки P' и Q', соответствующие P и Q, принадлежат треугольнику $A'B'C'$ (т. 62), а следовательно, и плоскости α'. Так как

прямая PQ переходит в прямую $P'Q'$, принадлежащую α', а точка X лежит на прямой PQ, то соответствующая ей точка X' лежит на прямой $P'Q'$, а значит, и на плоскости α'.

Покажем теперь, что каждая точка X' плоскости α' является образом некоторой точки X плоскости α. Для этого также проведём через точку X' прямую, пересекающую треугольник $A'B'C'$ в двух точках P' и Q'. Пусть P и Q – точки, образами которых являются точки P' и Q'. Прямая PQ при движении переходит в прямую $P'Q'$. Следовательно, точка X' является образом одной из точек прямой PQ, а значит, и плоскости α. Теорема доказана.

2. Симметрия относительно плоскости и точки, параллельный перенос

Определение 145. Пусть α – произвольная плоскость и X – произвольная точка пространства. Проведём через точку X прямую a, перпендикулярную плоскости α. Она пересечёт плоскость α в некоторой точке A. Построим теперь точку X' по следующему правилу. Если точка X лежит на плоскости α, то X' совпадает с X. Если же точка X не лежит на плоскости α, то X' лежит на прямой a в другом полупространстве относительно плоскости α, причём расстояния AX и AX' равны. Точка X' называется симметричной точке X относительно плоскости α.



Отображение пространства на себя, при котором точке X сопоставляется точка X', симметричная относительно плоскости α, называется преобразованием симметрии или зеркальным отражением относительно плоскости α.

Теорема 173. Преобразование симметрии относительно плоскости в пространстве есть движение.

Доказательство. Пусть P и Q – две произвольные точки пространства. Проведём через прямую PQ плоскость β, перпендикулярную плоскости α. Она пересечёт плоскость α по некоторой прямой b. Точки P' и Q', симметричные точкам P и Q относительно плоскости α, будут симметричны точкам P и Q относительно прямой b. Действительно, прямые, перпендикулярные плоскости α и проходящие через точки P и Q, лежат в плоскости β и перпендикулярны прямой b. Так как симметрия в плоскости относительно прямой сохраняет расстояния ($PQ = P'Q'$), то этим свойством обладает и симметрия относительно плоскости в пространстве. Следовательно, симметрия относительно плоскости есть движение. Теорема доказана.

Преобразование симметрии относительно данной точки в пространстве определяется дословно так же, как и на плоскости. Так же как и на плоскости, *преобразование симметрии относительно точки в пространстве есть движение*. Для доказательства достаточно заметить, что преобразование симметрии в

пространстве относительно данной точки *O* в каждой плоскости *α*, проходящей через точку *O*, сводится к преобразованию симметрии в этой плоскости относительно той же точки *O*.

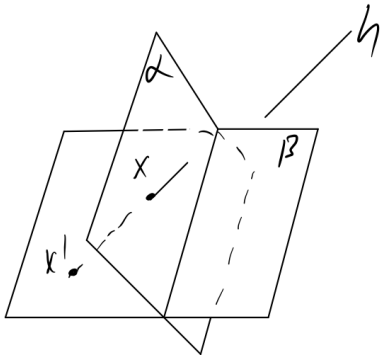
С помощью понятия симметрии относительно плоскости и относительно точки вводятся понятия *плоскости симметрии* и *центра симметрии* для пространственных фигур, подобно тому как для плоских фигур определяются ось симметрии и центр симметрии.

Параллельным переносом в пространстве, как и на плоскости, называется такое движение при котором точки смещаются по параллельным прямым на одно и то же расстояние. Доказательство теоремы 65 сохраняется и в том случае, если участвующие в нём точки принадлежат пространству, а не одной конкретной плоскости.

Дословно так же, как на плоскости, определяются *преобразование подобия* в пространстве, а также простейшее преобразование подобия – *гомотетия*. Преобразование подобия в пространстве переводит прямые в прямые, плоскости в плоскости, сохраняет углы между прямыми и плоскостями. Фигура, полученная из данной преобразованием подобия, называется *подобной* данной.

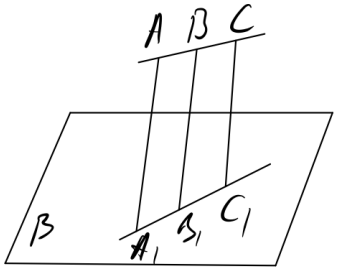
3. Проектирование плоскости на плоскость

Определение 146. Пусть *α* и *β* – две любые плоскости и *h* – прямая, пересекающая каждую из этих плоскостей. Пусть *X* – произвольная точка плоскости *α*. Проведём через точку *X* прямую, параллельную прямой *h*. Она пересечёт плоскость *β* в некоторой точке *X*'. Отображение плоскости *α* на плоскость *β*, при котором каждой точке *X* сопоставляется указанным образом точка *X*', называется *параллельным проектированием* плоскости *α* на плоскость *β*. Параллельное проектирование, очевидно, является взаимно-однозначным отображением. Если проектирующие прямые перпендикулярны плоскости *β*, то проектирование называется *ортогональным*.



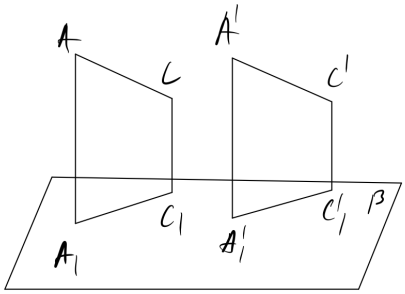
Теорема 174. При параллельном проектировании плоскости *α* на плоскость *β* прямые переходят в прямые и сохраняется порядок точек на прямой. Параллельные прямые переходят в параллельные прямые, а пересекающиеся в пересекающиеся. Сохраняется отношение отрезков одной прямой или параллельных прямых.

Доказательство. 1) Все прямые, проектирующие точки прямой *AC* на плоскость *β,* параллельны и лежат в одной плоскости с прямой *AC*, пересекающей *β* по прямой

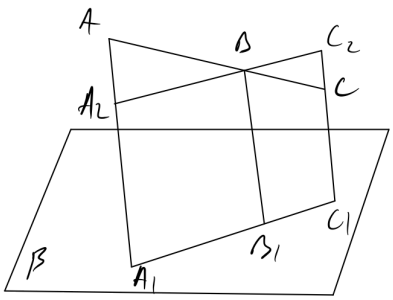


A_1C_1. Произвольная точка B отрезка AC переходит в точку B_1 отрезка A_1C_1 (лемма 6).

2) Пусть AC и $A'C'$ – параллельные прямые. Соответствующие им прямые A_1C_1 и $A_1'C_1'$ параллельны, так как являются прямыми пересечения двух параллельных плоскостей с плоскостью β. Первая из этих плоскостей проходит через прямые AC и AA_1, а вторая – через прямые $A'C'$ и $A'A_1'$.



Если две прямые пересекаются в точке B, то соответствующая ей точка B_1 будет общей точкой прямых, получаемых при проектировании. Следовательно, пересекающиеся прямые переходят в пересекающиеся.



3) Покажем, что $\frac{AB}{BC} = \frac{A_1B_1}{B_1C_1}$. Проведём через точку B прямую, параллельную A_1C_1. Треугольники BAA_2 и BCC_2 подобны, откуда следует указанная пропорция. Теорема доказана.

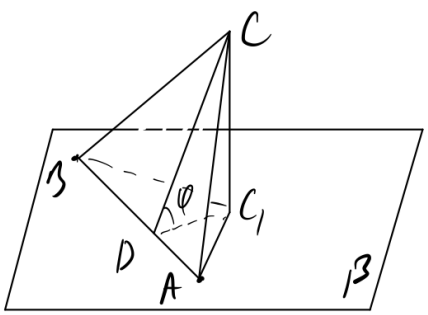
<u>Следствие</u>. Поскольку при параллельном проектировании пересекающиеся прямые переходят в пересекающиеся, а параллельные в параллельные и сохраняется порядок точек на прямой, полуплоскости переходят в полуплоскости.

<u>Определение 147</u>. Пусть F – фигура в плоскости α. Фигура F' плоскости β, состоящая из точек X', соответствующих при параллельном проектировании точкам X фигуры F, называется *проекцией* фигуры F.

<u>Теорема 175</u>. Площадь S_1 ортогональной проекции многоугольной фигуры на плоскость равна произведению площади фигуры S на косинус угла между плоскостью фигуры и плоскостью проекции: $S_1 = S \cdot \cos\varphi$.

<u>Доказательство</u>. Рассмотрим сначала треугольник и его проекцию на плоскость, проходящую через одну из его сторон. Проекцией треугольника ABC является треугольник ABC_1 в плоскости β. Проведём высоту CD треугольника. По теореме о трёх перпендикулярах отрезок C_1D – высота треугольника ABC_1. Угол CDC_1 равен углу между плоскостью треугольника ABC и плоскостью β. Имеем: $C_1D = CD \cdot \cos\varphi$,

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CD,$$



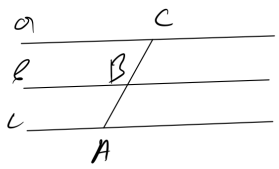
$$S_{ABC_1} = \frac{1}{2} AB \cdot C_1D .$$

Отсюда $S_{ABC_1} = S_{ABC} \cos\varphi$.

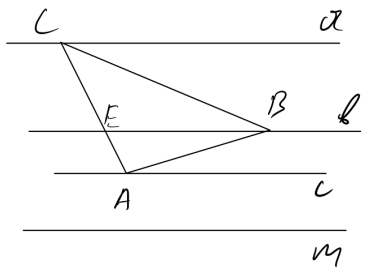
Таким образом, в рассматриваемом случае теорема выполняется. Она будет выполняться и в случае, когда вместо плоскости β взята любая параллельная ей плоскость. Действительно, при проектировании фигуры на параллельные плоскости её проекции совмещаются параллельным переносом в направлении проектирования. А совмещаемые параллельным переносом фигуры равны.

Рассмотрим теперь общий случай. Прежде всего покажем, что треугольник на плоскости можно разбить на два треугольника так, чтобы их общая сторона была параллельна данной прямой.

Заметим, что из трёх параллельных прямых *a, b, c* на плоскости одна проходит так, что две другие лежат относительно неё в разных полуплоскостях. Действительно, пусть некоторая секущая пересекает данные прямые в точках *A, B, C*. Одна из этих точек, например *B*, лежит между двумя другими. Тогда точки *A* и *C* лежат в разных полуплоскостях относительно прямой *b*, а значит, и проходящие через *A* и *C* прямые *a* и *c* тоже лежат в разных полуплоскостях относительно *b* (т. 29).



Пусть дана прямая *m* и треугольник *ABC*, стороны которого не параллельны *m*. Проведём через вершины треугольника прямые *a, b, c*, параллельные *m*. Одна из них, например, *b*, проходит между двумя другими. Тогда точки *A* и *C* лежат в разных полуплоскостях относительно прямой *b*, и следовательно, прямая *b* пересекает отрезок *AC* в некоторой точке *E*. Значит, отрезок *BE* разбивает треугольник *ABC* на два треугольника, общая сторона которых параллельна прямой *m*.



Теперь докажем теорему для произвольной многоугольной фигуры. Разобьём данную фигуру на треугольники. Каждый треугольник, у которого нет стороны, параллельной плоскости проекции, мы разобьём на два треугольника с общей стороной, параллельной плоскости проекции. Поскольку при проектировании полуплоскости переходят в полуплоскости, внутренние точки треугольников переходят во внутренние точки их проекций и отрезки, разбивающие многоугольную фигуру на треугольники, перейдут в отрезки, разбивающие проекцию этой фигуры на треугольники.

Теперь для каждого треугольника нашего разбиения Δ и его проекции Δ_1 запишем равенство $S_{\Delta_1} = S_\Delta \cos\varphi$. Сложим все эти равенства почленно. Тогда получим слева площадь проекции фигуры, а справа площадь самой фигуры, умноженную на cos φ. Теорема доказана.

§27. Многогранники

1. Выпуклые многогранники

В данном параграфе слово «многоугольник» будет употребляться в смысле пополненный многоугольник.

Определение 148. Многогранником называется фигура, которая состоит из конечного числа многоугольников (называемых *гранями* многогранника), расположенных в пространстве так, что:

1) имеется *замкнутость*: любая сторона каждой из граней является стороной ещё одной и только одной грани (называемой *смежной* с первой гранью);
2) имеется *связность* граней: для любых двух граней α и β можно указать такую цепочку граней α_1, α_2, …, α_n, что грань α смежна с α_1, грань α_1 смежна с α_2, …, грань α_n смежна с β;
3) если грани α и β имеют общую вершину A, то выбор граней α_1, α_2, …, α_n, о которых говорится в предыдущем пункте, можно осуществить так, чтобы все они имели ту же вершину A.

Стороны граней многогранника называются *рёбрами*, а вершины – *вершинами многогранника*. Отрезок, соединяющий две вершины многогранника, не принадлежащие одной грани, называется *диагональю* многогранника.

Определение 149. Многогранник называется *выпуклым*, если он расположен в одном полупространстве относительно любой плоскости, содержащей его грань (за исключением самой этой грани).

Определение 150. Каждая плоскость, содержащая грань выпуклого многогранника, разбивает пространство на два полупространства. Выберем те из них, которые содержат многогранник. Мы будем говорить, что точка *X лежит внутри* выпуклого многогранника, если она принадлежит каждому из выбранных полупространств.

Докажем, что все точки диагонали выпуклого многогранника являются его внутренними точками. Диагональ *AB* не пересекает грани многогранника, поскольку если бы отрезок *AB* пересекал некоторую грань многогранника, то точка пересечения лежала бы между гранями, содержащими точки *A* и *B*, что противоречит выпуклости многогранника. Значит, точки отрезка *AB* лежат в полупространстве точки *A* относительно всех граней не содержащих вершину *A* и в

полупространсве точки *B* относительно граней, содержащих вершину *A*. А это и есть полупространства, содержащие многогранник. Следовательно, все точки диагонали *AB* являются внутренними.

Заметим, что грани выпуклого многогранника являются выпуклыми многоугольниками. Действительно, если бы один из многоугольников был бы не выпуклым, то прямая, содержащая некоторую его сторону, делила бы многоугольник на части, лежащие в разных полуплоскостях. Если провести через эту прямую и некоторую внутреннюю точку многогранника плоскость, то точки многогранника будут лежать в разных полупространствах относительно этой плоскости, что противоречит условию выпуклости многогранника.

Определение 151. *Пополненным выпуклым многогранником* называется фигура, которая состоит из многогранника и всех лежащих внутри него точек.

Определение 152. В пространстве точка *X* называется *внутренней точкой* фигуры *F*, если существует такое положительное число *r*, что все точки пространства, расстояния которых от точки *X* не больше *r*, принадлежат фигуре *F*. Точка *Y* называется *внешней* по отношению к *F*, если существует такое положительное число *r*, что все точки пространства, расстояния которых от точки *Y* не больше *r*, не принадлежат фигуре *F*. Точка *Z* называется *граничной* по отношению к *F*, если для любого положительного числа *r* на расстоянии не большем *r* от *Z* найдётся по крайней мере одна точка, принадлежащая фигуре *F*, и по крайней мере одна точка, не принадлежащая фигуре *F*. Любая внутренняя точка фигуры принадлежит этой фигуре, а любая внешняя точка – не принадлежит. Граничные точки могут как принадлежать фигуре, так и не принадлежать. Фигура, состоящая из всех внутренних точек фигуры *F* называется *внутренней частью* фигуры *F*. Фигура, состоящая из всех граничных точек фигуры *F*, называется *границей F*.

Покажем, что внутренние точки выпуклого многогранника в смысле определения 150 являются внутренними точками соответствующего пополненного многогранника в смысле определения 152, и наоборот.

Действительно, если *M* – внутренняя точка выпуклого многогранника *P* по определению 150, то возьмём в качестве *r* число, меньшее каждого из расстояний от точки *M* до плоскостей, содержащих грани многогранника. Все точки, находящиеся на расстоянии не большем r от точки *M*, будут принадлежать пополненному многограннику *P*'. Значит, точка *M* является внутренней точкой пополненного многогранника *P*' в смысле определения 152. Обратно, если *M* – внутренняя точка пополненного выпуклого многогранника *P*' по определению 152, то она не может принадлежать многограннику *P*, а значит должна являться его внутренней точкой по определению пополненного многогранника.

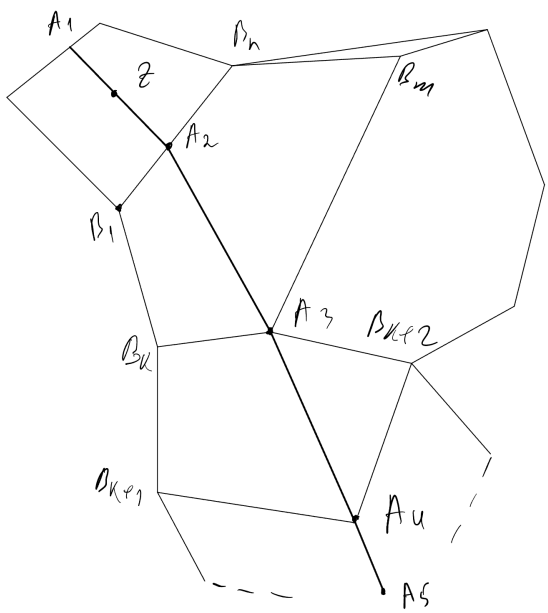
В дальнейшем при доказательствах свойств многогранников в зависимости от удобства мы будем пользоваться как определением 150, так и определением 152. Как мы показали, эти определения эквивалентны с поправкой на то, что в определении 152 подразумевается пополненный многогранник, а в определении 150 соответствующий ему обычный.

Определение 153. *Телом* называется не лежащая в одной плоскости фигура, которая состоит из своей внутренней части и её границы, причём любые две точки тела можно соединить ломанной, целиком принадлежащей этому телу. Граница тела называется его *поверхностью*.

Пополненный выпуклый многогранник является телом. В дальнейшем, при определении различных видов многогранников, не обязательно выпуклых, мы будем понимать под многогранником тело, ограниченное поверхностью удовлетворяющей определению 148, и содержащее не принадлежащие поверхности внутренние точки в смысле определения 152. При этом какие точки следует считать принадлежащими многограннику, в каждом случае будет указываться особо.

Определение 154. Если тело пересечено плоскостью, то фигуру, состоящую из общих точек тела и плоскости, называют *сечением тела*.

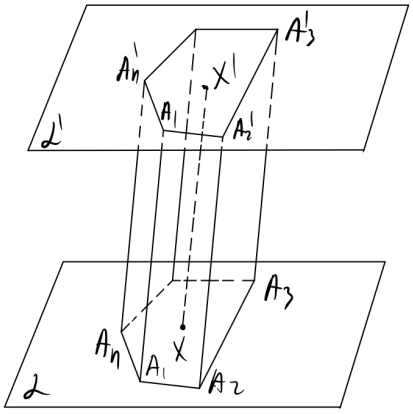
Докажем, что прямая *a*, проходящая через внутреннюю точку *O* выпуклого многогранника, пересекает поверхность многогранника в двух точках, лежащих по разные стороны от точки *O*. Возьмём какую-нибудь точку *Z* на грани многогранника и построим сечение многогранника плоскостью α, в которой лежат прямая *a* и точка *Z*. Поверхность многогранника состоит из конечного числа многоугольников, обладает замкнутостью и связностью (опр. 148), поэтому сечение многогранника будет ограничено замкнутой ломанной – многоугольником. Действительно, секущая плоскость пересечёт грань точки *Z* по отрезку A_1A_2, концы которого лежат на ограничивающей грань ломанной (лемма 13).



Допустим, что точка A_2 принадлежит ребру B_1B_n многоугольника. Тогда секущая плоскость пересечёт грань смежную с первой по отрезку A_2A_3. Эта грань ограничена отрезком B_1B_n и незамкнутой ломанной B_1… B_n концы которой лежат в разных полуплоскостях относительно прямой пересечения секущей плоскости и плоскости грани. Следовательно, ломанная $B_{1...}$

B_n пересекает эту прямую в точке A_3 (т. 102). Допустим, точка A_3 окажется вершиной грани из которой исходят рёбра A_3B_k и A_3B_m. Точки B_k и B_m находятся в разных полупространствах относительно секущей плоскости. Будем обходить грани, имеющие вершину A_3, от вершины B_k к вершине B_m, не проходя по рёбрам, содержащим A_3 (то, что это возможно следует из пунктов 2 и 3 определения 148). В результате мы пройдём по ломанной $B_kB_{k+1}\ldots B_m$ концы которой лежат в разных полупространствах относительно секущей плоскости. Тогда рассуждением аналогичным доказательству теоремы 102 приходим к выводу, что секущая плоскость пересекает эту ломанную в некоторой точке A_4. Наконец, рассмотрим случай, когда одна из сторон сечения, например, A_3A_4 окажется ребром многогранника. Тогда в качестве концов ломанной обхода возьмём концы рёбер A_4B_{k+1} и A_4B_{k+2}, принадлежащих граням, смежным по ребру A_3A_4. Пройдя по ломанной $B_{k+1}\ldots B_{k+2}$, содержащей рёбра граней с вершиной A_4, мы получим следующую точку сечения A_5 и так далее. Поскольку количество граней конечно, продолжая это построение мы придём к грани, плоскость которой содержит точку A_1 и таким образом замкнём ломанную, ограничивающую сечение. Поскольку многогранник выпуклый, его сечение будет частью плоскости α, лежащей в одной полуплоскости с точкой O относительно прямых, содержащих стороны многоугольника. Следовательно, сечение является выпуклым многоугольником. Тогда прямая a должна пересечь этот многоугольник в двух точках по разные стороны от O (лемма 13), которые и будут точками пересечения прямой с поверхностью многогранника.

2. Призма



Пусть α и α' две параллельные плоскости, h – некоторая прямая, пересекающая эти плоскости в точках X и X', $A_1A_2A_3\ldots A_n$ – выпуклый многоугольник, лежащий в плоскости α, $A_1'A_2'A_3'\ldots A_n'$ – многоугольник в плоскости α', полученный из многоугольника $A_1A_2A_3\ldots A_n$ параллельным переносом вдоль прямых, параллельных h, на расстояние XX'. Рассмотрим фигуру P, которая состоит из указанных многоугольников (называемых основаниями), а так же отрезков, соединяющих соответствующие точки этих оснований при параллельном переносе. Эта фигура ограничена многоугольниками, расположение которых удовлетворяет определению 148, следовательно её поверхность является многогранником. Поскольку исходные многоугольники выпуклые, а при параллельном переносе расположение точек относительно плоскости не меняется, этот многогранник тоже является выпуклым. Отрезки, соединяющие точки оснований при параллельном переносе, лежат в полупространстве многогранника относительно плоскости каждой его грани, следовательно, точки фигуры P принадлежат пополненному выпуклому многограннику ограниченному той же

поверхностью. Обратно, точки этого пополненного выпуклого многогранника будут лежать на параллельных отрезках, соединяющих точки оснований *P,* и таким образом, этот пополненный многогранник эквивалентен *P*.

Построенная фигура *P* называется призмой. Дадим формальное определение.

Определение 155. *Призмой* называется многогранник, образованный заключёнными между двумя параллельными плоскостями отрезками всех параллельных прямых, которые пересекают плоский многоугольник в одной из плоскостей. Грани призмы, лежащие в этих плоскостях, называются *основаниями призмы*. Другие грани называются *боковыми гранями*. Рёбра призмы, соединяющие вершины оснований, называются *боковыми рёбрами*.

Их определения следует, что все боковые грани призмы – параллелограммы; все боковые рёбра призмы параллельны. Основания призмы равны так как совмещаются параллельным переносом в направлении боковых рёбер призмы. Как было показано выше, призма, основанием которой является выпуклый многоугольник, является выпуклым многогранником.

На рисунке изображена призма, образованная отрезками XX' параллельных прямых, пересекающих многоугольник P: $A_1A_2A_3\ldots A_n$ в плоскости α. Основаниями призмы являются многоугольник P и равный ему многоугольник P' в плоскости α'. Боковыми гранями призмы являются параллелограммы $A_1A_2A_2'A_1'$, $A_2A_3A_3'A_2'$, … . Боковыми рёбрами призмы являются отрезки A_1A_1', A_2A_2', A_3A_3', … .

Определение 156. *Высотой призмы* называется расстояние между плоскостями её оснований. Отрезок, соединяющий две вершины, не принадлежащие одной грани, называется *диагональю призмы*.

Определение 157. Призма называется *прямой*, если её боковые рёбра перпендикулярны плоскостям оснований. В противном случае призма называется *наклонной*. Прямая призма называется *правильной*, если её основания являются правильными многоугольниками.

Определение 158. *Боковой поверхностью призмы* (точнее, площадью боковой поверхности) называется сумма площадей боковых граней. *Полная поверхность* призмы равна сумме боковой поверхности и площадей оснований.

Теорема 176. Боковая поверхность прямой призмы равна произведению периметра основания на высоту призмы, то есть на длину бокового ребра.
Доказательство. Боковые грани прямой призмы – прямоугольники. Основания этих прямоугольников являются сторонами многоугольника, лежащего в основании

призмы, а высоты равны длине боковых рёбер. Отсюда следует, что боковая поверхность призмы равна

$$S = a_1l + a_2l + \ldots + a_nl = pl,$$

где p – периметр основания призмы, а l – длина боковых рёбер. Теорема доказана.

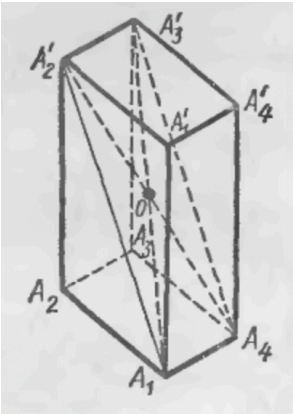
3. Параллелепипед

Определение 159. *Параллелепипедом* называется призма, основанием которой является параллелограмм.

У параллелепипеда все грани – параллелограммы.

Теорема 177. Диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и точкой пересечения делятся пополам.

Доказательство. Рассмотрим какие-нибудь две диагонали параллелепипеда, например A_1A_3' и A_4A_2'. Так как четырёхугольники $A_1A_2A_3A_4$ и $A_2A_2'A_3'A_3$ – параллелограммы, то четырёхугольник $A_4A_1A_2'A_3'$ тоже параллелограмм. Диагонали параллелепипеда A_1A_3' и A_4A_2' являются диагоналями этого параллелограмма. Поэтому они пересекаются и точкой пересечения O делятся пополам. Аналогично доказывается, что диагонали A_1A_3' и A_2A_4', а также диагонали A_1A_3' и A_3A_1' пересекаются и точкой пересечения делятся пополам. Отсюда заключаем, что все четыре диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и точкой пересечения делятся пополам. Теорема доказана.

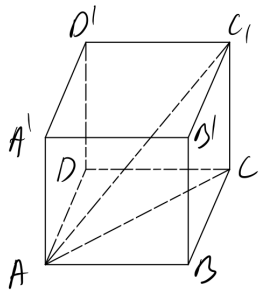


Из теоремы 177 следует, что *точка пересечения диагоналей параллелепипеда является его центром симметрии*.

Определение 160. Грани параллелепипеда, не имеющие общих вершин, называются *противолежащими*.

Теорема 178. У параллелепипеда противолежащие грани параллельны и равны.

Доказательство. Рассмотрим какие-нибудь две противолежащие грани параллелепипеда, например $A_1A_2A_2'A_1'$ и $A_3A_4A_4'A_3'$. Так как все грани параллелепипеда – параллелограммы, то прямая A_1A_2 параллельна прямой A_3A_4, а прямая A_1A_1' параллельна прямой A_4A_4'. Отсюда следует, что плоскости рассматриваемых граней параллельны. Из того, что грани параллелепипеда – параллелограммы, следует, что все отрезки A_1A_4, $A_1'A_4'$, $A_2'A_3'$ и A_2A_3 параллельны и равны. Отсюда заключаем, что грань $A_1A_2A_2'A_1'$ совмещается параллельным переносом вдоль ребра A_1A_4 с гранью $A_3A_4A_4'A_3'$. Значит, эти грани равны. Аналогично доказывается параллельность и равенство любых двух противолежащих граней параллелепипеда. Теорема доказана.



Определение 161. Прямой параллелепипед, у которого основанием является прямоугольник, называется *прямоугольным параллелепипедом*. Прямоугольный параллелепипед у которого все рёбра равны, называется *кубом*.

У прямоугольного параллелепипеда все грани – прямоугольники.

Определение 162. Длины непараллельных рёбер прямоугольного параллелепипеда называются его *линейными размерами*.

У прямоугольного параллелепипеда три линейных размера.

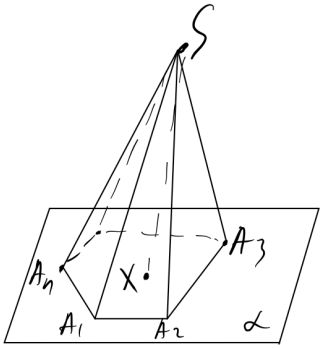
Теорема 179. В прямоугольном параллелепипеде квадрат любой диагонали равен сумме квадратов трёх его линейных размеров.
Доказательство. Рассмотрим прямоугольный параллелепипед $ABCDA'B'C'D'$. Из прямоугольного треугольника $AC'C$ по теореме Пифагора получаем: $AC'^2 = AC^2 + CC'^2$. Из прямоугольного треугольника ACB по теореме Пифагора получаем: $AC^2 = AB^2 + BC^2$. Тогда

$$AC'^2 = CC'^2 + AB^2 + BC^2.$$

Рёбра AB, BC и CC' не параллельны, а следовательно, их длины являются линейными размерами параллелепипеда. Теорема доказана.

4. Пирамида

Пусть S – некоторая точка, $A_1A_2A_3\ldots A_n$ – выпуклый многоугольник, плоскость которого не содержит точку S. Фигура, которая состоит из многоугольника $A_1A_2A_3\ldots A_n$ (называемого основанием) и треугольников SA_1A_2, SA_2A_3, …, SA_nA_1 (боковых граней) удовлетворяет определению 148 и следовательно, является многогранником – пирамидой.



Поскольку основание данной пирамиды – выпуклый многоугольник, все его точки лежат в одной полуплоскости относительно прямой, содержащей любую из его сторон A_iA_{i+1}. Эта прямая является прямой пересечения плоскости боковой грани SA_iA_{i+1} и основания пирамиды, значит, все точки основания пирамиды лежат в одном полупространстве относительно плоскости SA_iA_{i+1} (поскольку отрезки, соединяющие любые две точки основания, не пересекаются с прямой A_iA_{i+1}, а значит и с плоскостью SA_iA_{i+1}). Следовательно, пирамида, основанием которой является выпуклый многоугольник, является выпуклым многогранником. Такой многогранник, будучи пополнен внутренними точками, является телом.

Покажем, что все точки этого тела лежат на отрезках, соединяющих точку S с точками основания. Действительно, пусть X – некоторая внутренняя точка пирамиды. Возьмём какую-нибудь точку O основания пирамиды и проведём через неё и прямую SX плоскость. Прямая пересечения этой плоскости с плоскостью α пересечёт стороны основания пирамиды в двух точках Y_1 и Y_2. Поскольку точка X лежит в полупространстве пирамиды относительно плоскости каждой её грани, лучи SX и SY_1 отложены в одну полуплоскость относительно прямой SY_2, и с другой стороны, лучи SY_2 и SX отложены в одну полуплоскость относительно прямой SY_1. Это возможно только если луч SX проходит между сторонами угла Y_1SY_2, а значит, пересекает отрезок Y_1SY_2, принадлежащий плоскости α. Таким образом, луч SX должен пересекать α, причём точка пересечения должна принадлежать основанию пирамиды.

Обратно, если точка X лежит на отрезке SE, где E – точка основания пирамиды, то она принадлежит пирамиде. Действительно, в этом случае отрезок SE лежит в полупространстве пирамиды относительно плоскостей каждой из её боковых граней и в полупространстве точки S относительно основания пирамиды. Следовательно, точка X принадлежит пирамиде как пополненному выпуклому многограннику.

Тогда можно дать следующее определение пирамиды.

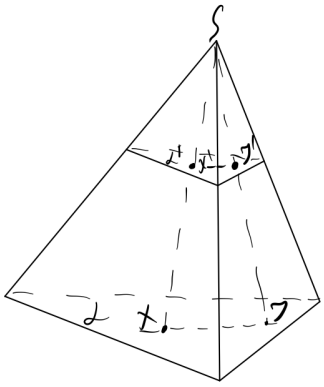
Определение 163. *Пирамидой* называется многогранник, образованный всеми отрезками, соединяющими данную точку – *вершину пирамиды* – с точками плоского многоугольника – *основания пирамиды*. Поверхность пирамиды состоит из основания и боковых граней. Каждая боковая грань – треугольник, одной из вершин которого является вершина пирамиды, а противолежащей ей стороной – сторона основания пирамиды. *Боковой поверхностью* пирамиды называется сумма площадей её боковых граней. *Боковым рёбрами* пирамиды называются рёбра, соединяющие вершину пирамиды с вершинами основания. *Высотой пирамиды* называется перпендикуляр, опущенный из вершины пирамиды на плоскость основания. Пирамида называется *n-угольной*, если в её основании лежит n-угольник. Треугольная пирамида называется *тетраэдром*.

На рисунке изображена пирамида $SA_1A_2\ldots A_n$, образованная отрезками SX. Точка S является вершиной пирамиды, многоугольник $A_1A_2\ldots A_n$ – основание, боковые рёбра – $SA_1, SA_2, \ldots, SA_n$.

Как было показано выше, пирамида, основанием которой является выпуклый многоугольник, является выпуклым многогранником.

Теорема 180. Плоскость, пересекающая пирамиду и параллельная её основанию, отсекает подобную пирамиду.

Доказательство. Пусть S – вершина пирамиды, α – плоскость основания и α' – секущая плоскость. Пусть X' и Y' – произвольные точки, принадлежащие сечению пирамиды плоскостью α'. Тогда по определению пирамиды эти точки лежат на отрезках SX и SY, где X и Y точки основания пирамиды. Прямые XY и $X'Y'$ параллельны, так как лежат в одной плоскости, плоскости треугольника XYS, и не пересекаются. Из подобия треугольников SXY и $SX'Y'$ следует, что отношения $\frac{X'S}{XS}$ и $\frac{Y'S}{YS}$ равны, то есть отношение $\frac{X'S}{XS} = k$ не зависит от взятой точки X. Отсюда следует, что отрезки, соединяющие точку S с точками сечения, образуют пирамиду, которая получается из данной пирамиды преобразованием гомотетии относительно точки S с коэффициентом гомотетии k. А гомотетичные фигуры подобны. Теорема доказана.

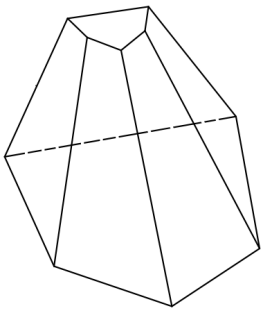


Определение 164. Пирамида называется *правильной*, если её основанием является правильный многоугольник, а основание высоты совпадает с центром этого многоугольника (то есть с центром описанной около него окружности). Высота боковой грани правильной пирамиды, проведённая из её вершины, называется *апофемой*.

Несложно доказать, что у правильной пирамиды боковые рёбра равны и поэтому боковые грани являются равными равнобедренными треугольниками.

Теорема 181. Боковая поверхность правильной пирамиды равна произведению полупериметра основания на апофему.
Доказательство. Если сторона основания a, а число сторон n, то боковая поверхность пирамиды равна $\frac{al}{2}n = \frac{anl}{2} = \frac{pl}{2}$, где l – апофема, а p – периметр основания. Теорема доказана.

Определение 165. Часть пирамиды, заключённая между плоскостью основания и некоторой параллельной ей плоскостью, пересекающей пирамиду, называется *усечённой пирамидой*. Грани усечённой пирамиды, лежащие в этих плоскостях, называются *основаниями пирамиды*. Усечённая пирамида, которая получается из правильной, тоже называется *правильной*.



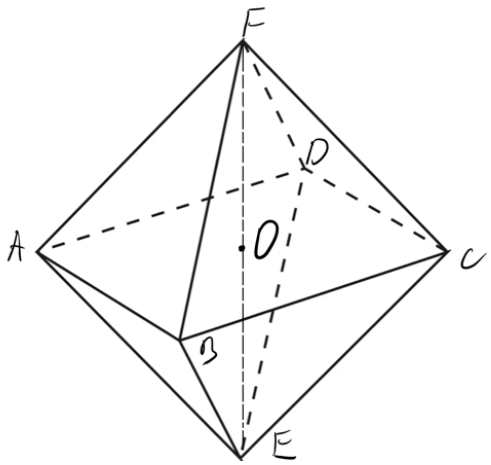
Основания усечённой пирамиды являются подобными многоугольниками, боковые грани – трапеции. Боковые грани правильной усечённой пирамиды – равные равнобокие трапеции, высоты которых называются *апофемами*.

Упражнение. Доказать, что боковая поверхность правильной усечённой пирамиды равна произведению полусуммы периметров оснований на апофему.

5. Правильные многогранники

Определение 166. Выпуклый многогранник называется *правильным*, если его грани являются правильными многоугольниками с одним и тем же числом сторон и в каждой вершине многогранника сходится одинаковое число рёбер.

Примерами правильных многогранников являются правильный тетраэдр и куб. Построим ещё один правильный многогранник – *октаэдр*, гранями которого являются правильные треугольники, а в каждой вершине сходятся по четыре ребра.



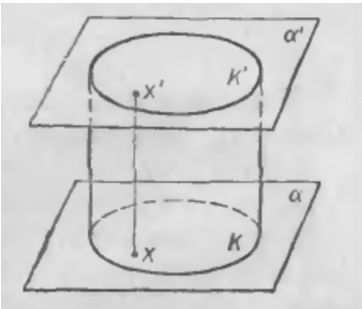
Пусть *ABCD* – квадрат со стороной, равной *a*. Проведём через центр *O* квадрата прямую, перпендикулярную плоскости квадрата, и отложим на ней отрезки *OF* и *OE*, равные $\frac{a}{\sqrt{2}}$.

Соединим отрезками точки *F* и *E* с точками *A, B, C, D*. Получаем искомый октаэдр *FABCDE*. Действительно, в каждой его вершине сходится четыре ребра, а из применения теоремы Пифагора к прямоугольному треугольнику *AOF* получаем, что *AF* = *a*. Аналогично доказывается равенство всех других рёбер полученного многогранника. Следовательно, все его грани являются правильными треугольниками. Многогранник *FABCDE* выпуклый, поскольку любые три вершины, не лежащие в выбранной грани, находятся по одну сторону с точкой *O* от плоскости этой грани.

§28. Тела вращения

1. Цилиндр

Определение 167. *Цилиндром* (точнее, круговым цилиндром) называется тело, образованное заключёнными между двумя параллельными плоскостями отрезками всех параллельных прямых, пересекающих круг в одной из плоскостей. Отрезки с одним концом на окружности этого круга называются *образующими цилиндра*.



Другие концы отрезков образуют во второй плоскости круг, равный первому, поскольку оба круга совмещаются параллельным переносом на длину такого отрезка. Так как параллельный перенос сохраняет расстояние между точками,

центр первого круга проектируется в центр второго, а вторые концы образующих лежат на окружности круга во второй плоскости. Таким образом, поверхность цилиндра состоит из *оснований цилиндра* – двух равных кругов, лежащих в параллельных плоскостях, и *боковой поверхности*.

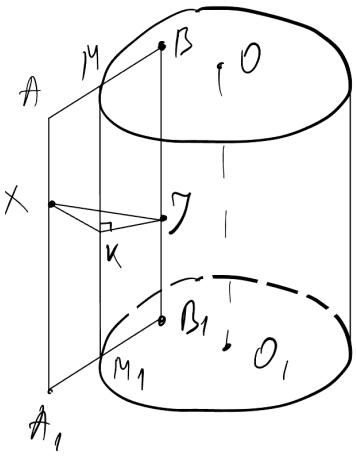
Цилиндр называется *прямым*, если его образующие перпендикулярны плоскостям оснований. В дальнейшем мы будем рассматривать только прямой цилиндр, называя его для краткости просто цилиндром.

На рисунке изображён прямой цилиндр. Он образован отрезками XX' параллельных прямых, заключённых между параллельными плоскостями α и α'. Его основаниями являются круги K и K' в этих плоскостях.

Радиусом цилиндра называется радиус его основания. *Высотой* цилиндра называется расстояние между плоскостями оснований. *Осью цилиндра* называется прямая, проходящая через центры оснований цилиндра. Ось параллельная образующим цилиндра. Сечение цилиндра плоскостью, проходящей через ось цилиндра, называется *осевым сечением*. Плоскость, проходящая через образующую цилиндра и перпендикулярная осевому сечению, проведённому через эту образующую, называется *касательной плоскостью* цилиндра.

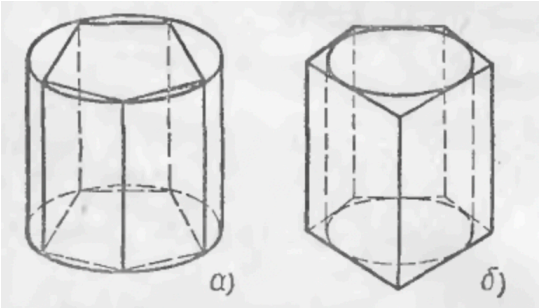
Теорема 182. Сечением цилиндра плоскостью, которая перпендикулярна оси цилиндра и пересекает ось в точке, лежащей между центрами оснований, является круг, равный основанию цилиндра.
Доказательство. Пусть β – данная плоскость, пересекающая ось OO_1 цилиндра в точке E. Эта плоскость параллельна плоскостям оснований цилиндра и пересекает все отрезки, составляющие цилиндр, поскольку их концы лежат в разных полупространствах относительно этой плоскости. Параллельный перенос в направлении оси цилиндра на расстояние OE, совмещает сечение плоскостью β с основанием цилиндра. Теорема доказана.

Докажем, что *боковая поверхность цилиндра состоит из образующих*. То, что точки образующих являются граничными точками цилиндра, очевидно. Докажем, что любая точка цилиндра, не лежащая на образующей или основании цилиндра, является внутренней. Пусть Y – данная точка цилиндра, лежащая на отрезке BB_1. Построим содержащее Y сечение цилиндра плоскостью, перпендикулярной оси цилиндра. Это будет круг с радиусом R, равным радиусу цилиндра. Обозначим центр этого круга O'. Теперь выберем число r так, чтобы оно было меньше расстояний от точки Y до плоскостей оснований и $R - r > YO'$. Покажем, что все точки X на расстоянии не большем r от



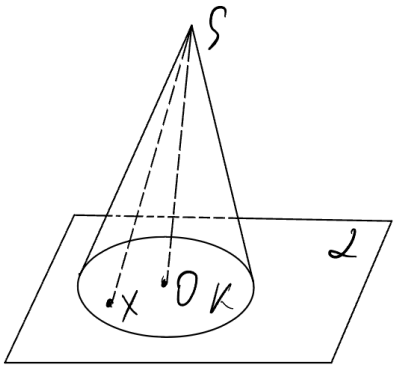
Y принадлежат цилиндру. Проведём через точку *X* прямую, параллельную оси цилиндра. Она пересечёт плоскости оснований цилиндра в точках *A* и A_1. Если эти точки принадлежат основаниям, то точка *X* является точкой цилиндра. Допустим, что точки *A* и A_1 не принадлежат основаниям цилиндра, тогда расстояние от этих точек до центров оснований больше *R*. Отрезки *AB* и A_1B_1 пересекают окружности оснований в точках *M* и M_1. Проведём перпендикуляр *YK* к прямой MM_1. Этот перпендикуляр принадлежит плоскости сечения с центром *O*'. Ясно, что $YX > YK > r$, что противоречит допущению. Значит, точка *X* принадлежит цилиндру, а точка *Y* является его внутренней точкой.

Определение 168. Призма называется *вписанной* в цилиндр, если её основания – равные многоугольники, вписанные в основания цилиндра, а боковые рёбра являются образующими цилиндра. Призма называется *описанной* около цилиндра, если её основания – равные многоугольники, описанные около оснований цилиндра, а плоскости боковых граней касаются боковой поверхности цилиндра.



2. Конус

Определение 169. *Конусом* (точнее, круговым конусом) называется тело, образованное всеми отрезками, соединяющими данную точку – *вершину конуса* – с точками некоторого круга – *основания конуса*. Отрезки, соединяющие вершину конуса с точками окружности основания, называются *образующими конуса*. Поверхность конуса состоит из основания и *боковой поверхности*.



Все образующие конуса равны. Конус называется *прямым*, если прямая, соединяющая вершину конуса с центром основания, перпендикулярна плоскости основания. В дальнейшем мы будем рассматривать только прямой конус, называя его для краткости просто конусом.

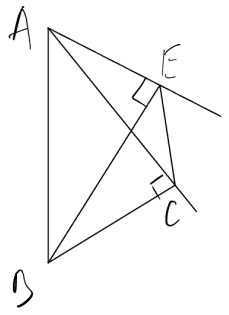
На рисунке изображён прямой конус. Его вершиной является точка *S*, а основанием – круг *K* в плоскости *α*. Конус образован всеми отрезками *SX*, соединяющими вершину *S* с точками *X* основания.

Определение 170. *Высотой* конуса называется перпендикуляр, опущенный из его вершины на плоскость основания. У прямого конуса основание высоты совпадает с центром основания. *Осью* прямого конуса называется прямая, содержащая его высоту. Сечение конуса плоскостью, проходящей через его ось, называется

осевым сечением. Плоскость, проходящая через образующую конуса и перпендикулярная осевому сечению, проведённому через эту образующую, называется *касательной плоскостью* конуса.

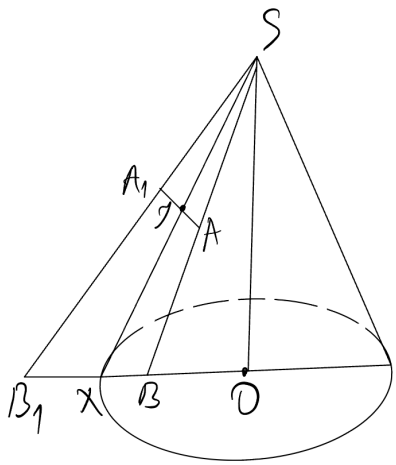
Теорема 183. Плоскость, перпендикулярная оси конуса и пересекающая его высоту, пересекает конус по кругу с центром на оси конуса.
Доказательство. Пусть плоскость сечения пересекает высоту конуса в некоторой точке. Тогда секущая плоскость параллельна плоскости основания конуса и пересекает все отрезки, составляющие конус, поскольку вершина и основание конуса лежат в разных полупространствах относительно секущей плоскости.

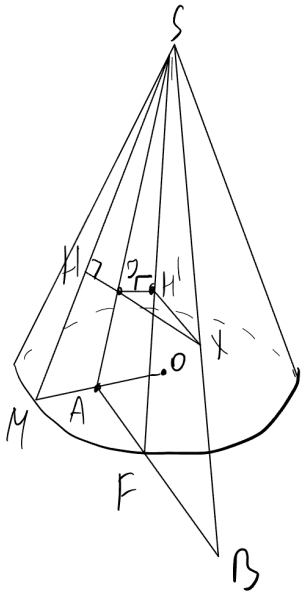
Точно так же, как в теореме 180 доказывается, что сечение конуса плоскостью совмещается с основанием конуса с помощью преобразования гомотетии относительно вершины конуса. Следовательно, сечение конуса есть круг с центром на оси конуса. Теорема доказана.



В следующем рассуждении нам понадобится такой факт: если в двух прямоугольных треугольниках *ABC* и *ABE* с гипотенузой *AB* угол *BAC* меньше угла *BAE*, то катет *BE* больше *BC*. Для доказательства будем считать, что точки *C* и *E* лежат в одной полуплоскости относительно *AB*. Тогда луч *AC* проходит между сторонами угла *BAE* и пересекает отрезок *BE*. В треугольнике *BCE* угол *BCE* тупой, поэтому *BE* > *BC*.

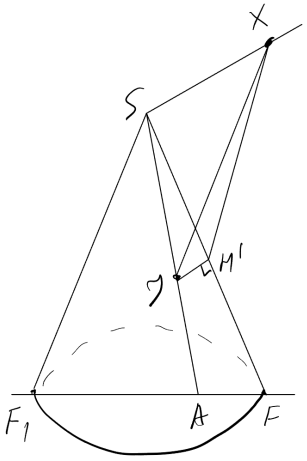
Докажем, что *боковая поверхность конуса состоит из образующих*. Докажем, что *боковая поверхность конуса состоит из образующих*. Пусть точка *Y* принадлежит образующей *SX* конуса и *r* – произвольное положительное число. Проведём плоскость *α* через эту образующую и ось конуса. В плоскости *α* проведём через точку *Y* прямую, перпендикулярную образующей, и отложим на ней равные отрезки *YA* и YA_1, длинна которых меньше *r*. Пусть точка *A* отложена в полуплоскость оси конуса. Тогда, если длина отрезка *YA* достаточно мала, луч *SA* проходит между лучами *SX* и *SO* и, следовательно, пересекает отрезок *OX*. Значит, точка *A* принадлежит конусу. Луч SA_1 отложен в другую полуплоскость и поэтому не разделяет стороны угла *XOS*. Следовательно, луч SA_1 не пересечёт отрезок *OX*, а значит, и основание конуса. Поэтому точка A_1 не принадлежит конусу. Значит, точка *Y* является граничной точкой конуса.





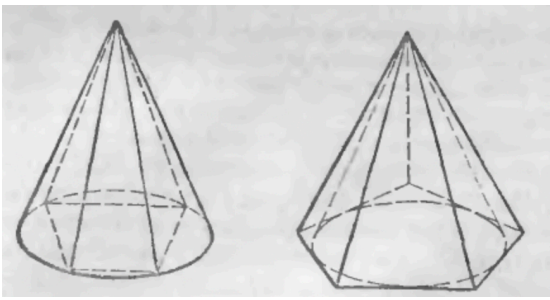
Докажем, что любая точка конуса, не лежащая на образующей или основании конуса, является внутренней. Пусть *Y* – данная точка конуса, лежащая на отрезке *SA*. Построим треугольник *SOM*, проведя радиус *OM* через *A*, и опустим перпендикуляр *YH* на сторону *SM*. Выберем число *r* так, чтобы оно было меньше расстояния от точки *Y* до плоскости основания конуса и меньше *YH*. Покажем, что все точки, расстояния которых от точки *Y* не больше *r*, принадлежат конусу. Пусть *X* – такая точка. Проведём через неё луч *SX* и рассмотрим случай, когда он пересекает плоскость основания конуса в точке *B*. Если точка *B* лежит на основании конуса, то точка *X* принадлежит конусу. Допустим, что точка *B* не принадлежит основанию конуса. Тогда отрезок *AB* пересекает окружность основания в некоторой точке *F*. Проведём перпендикуляр *YH*' к прямой *SF.* В треугольниках *SAM* и *SAF* стороны *SM* и *SF* равны, сторона *SA* общая и *AM* < *AF*, поэтому ∠*ASM* < ∠*ASF.* Тогда и в треугольниках *SYH* и *SYH*' имеем *YH* < *YH*'.

Теперь из треугольника *YXH*' получаем *YX* > *YH*' > *YH* > *r,* что противоречит выбору точки *X*.



Теперь рассмотрим случай, когда луч *SX* не пересекает плоскость основания. Проведём через прямые *SX* и *SA* плоскость *α*. Прямая пересечения плоскости *α* и плоскости основания конуса пересечёт окружность основания в двух точках *F* и F_1. Поскольку луч *SX* не пересекает отрезок FF_1, либо луч *SF*, либо луч SF_1 проходит между сторонами угла *ASX*. Пусть для определённости это будет луч *SF*. Тогда аналогично предыдущему из треугольника *YXH*' получаем *YX* > *YH*' > *YH* > *r*. Значит, точка *X* принадлежит конусу, а точка *Y* является его внутренней точкой. Итак, боковой поверхности конуса принадлежат только точки образующих конуса.

<u>Определение 171</u>. Часть конуса, заключённая между плоскостью основания и плоскостью, перпендикулярной оси конуса и пересекающей его высоту, называется *усечённым конусом*. Усечённый конус имеет два основания, одно из которым является сечением исходного конуса.



<u>Определение 172</u>. Пирамидой, *вписанной в конус*, называется такая пирамида, основание которой есть многоугольник, вписанный в окружность основания конуса, а вершиной является вершина конуса.

Боковые рёбра пирамиды, вписанной в конус, являются образующими конуса. Пирамида называется *описанной около конуса*, если её основанием является многоугольник, описанный около основания конуса, а вершина совпадает с вершиной конуса. Плоскости боковых граней описанной пирамиды являются касательными плоскостями конуса (*рекомендуется доказать это утверждение в качестве упражнения*).

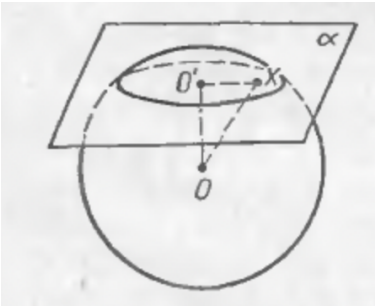
3. Шар

Определение 173. *Шаром* называется тело, которое состоит из всех точек пространства, находящихся на расстоянии, не большем данного, от данной точки. Эта точка называется *центром шара*, а данное расстояние – *радиусом шара*. Точки, которые удалены от центра шара на расстояние равное радиусу, образуют *шаровую поверхность* или *сферу*. Любой отрезок, соединяющий центр шара с точкой шаровой поверхности, также называется *радиусом*. Отрезок, соединяющий две точки шаровой поверхности и проходящий через центр шара, называется *диаметром*. Концы любого диаметра называются *диаметрально противоположными точками шара*.

Покажем, что все точки поверхности шара принадлежат сфере. Пусть Y – точка шара, не лежащая на сфере с центром O и радиусом R. Выберем число r так, чтобы $R - r > OY$. Пусть расстояние от точки X до точки Y не больше r, покажем, что точка X принадлежит шару. Из треугольника OXY имеем $OX < OY + YX \leqslant OY + r < R$, следовательно, точка X принадлежит шару, а точка Y является внутренней точкой шара.

Теорема 184. Если расстояние от центра шара до плоскости меньше радиуса шара, то плоскость и шар пересекаются. Сечение шара этой плоскостью есть круг, центр которого является основанием перпендикуляра, опущенного из центра шара на плоскость.

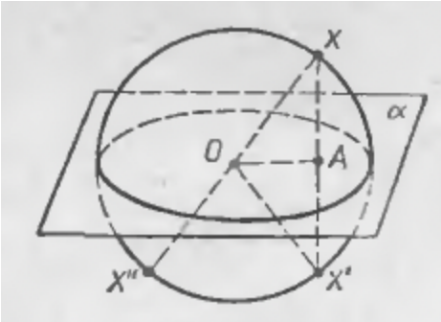
Доказательство. Пусть α – секущая плоскость и O – центр шара. Опустим перпендикуляр из центра шара на плоскость α и обозначим O' – основание этого перпендикуляра. Поскольку OO' меньше радиуса шара, точка O' принадлежит шару (опр. 172). Пусть X – другая произвольная точка шара, принадлежащая плоскости α. По теореме Пифагора $OX^2 = OO'^2 + O'X^2$. Так как OX не больше радиуса шара, то $O'X \leqslant \sqrt{R^2 - OO'^2}$. Таким образом, любая точка сечения шара плоскостью α находится от точки O' на расстоянии не большем $\sqrt{R^2 - OO'^2}$, следовательно, она принадлежит кругу с центом O' и радиусом $\sqrt{R^2 - OO'^2}$. Обратно, любая точка X этого круга принадлежит шару, поскольку $OX^2 = OO'^2 + O'X^2 \leqslant OO'^2 + R^2 - OO'^2 = R^2$, следовательно, $OX \leqslant R$. Значит, сечение шара плоскостью α есть круг с центром в точке O'. Теорема доказана.



Из доказательства теоремы следует, что радиус круга, который получается в сечении шара плоскостью, можно вычислить по формуле $R' = \sqrt{R^2 - OO'^2}$. Отсюда видно, что *плоскости, равноудалённые от центра, пересекают шар по равным кругам*. Круг в сечении плоскостью *α* будет тем больше, чем ближе плоскость *α* к центру шара, то есть чем меньше расстояние *OO*'. Наибольший круг получается в сечении плоскостью, проходящей через центр шара. Радиус этого круга равен радиусу шара.

Определение 174. Плоскость, проходящая через центр шара, называется *диаметральной плоскостью*. Сечение шара диаметральной плоскостью называется *большим кругом*, а сечение сферы – *большой окружностью*.

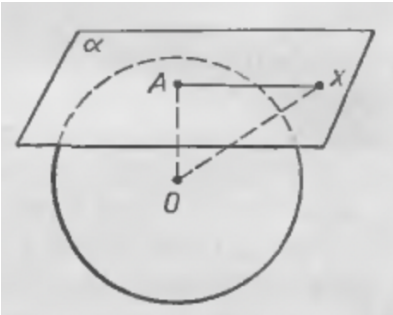
Теорема 185. Любая диаметральная плоскость шара является его плоскостью симметрии. Центр шара является центром симметрии.
Доказательство. Пусть *α* – диаметральная плоскость и *X* – произвольная точка шара. Построим точку *X*', симметричную точке *X* относительно плоскости *α*. Отрезок *XX*' перпендикулярен плоскости *α* и пересекается этой плоскостью посередине (в точке *A*). Из равенства прямоугольных треугольников *OAX* и *OAX*' следует, что *OX*' = *OX*. Так как *OX* ≤ *R*, то и *OX*' ≤ *R*, то есть точка, симметричная точке *X*, принадлежит шару. Первое утверждение теоремы доказано.



Пусть теперь *X*'' – точка, симметричная точке *X* относительно центра шара. Тогда *OX*'' = *OX* ≤ *R*, то есть точка *X*'' принадлежит шару. Теорема доказана.

Определение 175. Плоскость, проходящая через точку *A* шаровой поверхности и перпендикулярная к радиусу, проведённому в точку *A*, называется *касательной плоскостью*. Точка *A* называется *точкой касания*.

Теорема 186. Касательная плоскость имеет с шаром только одну общую точку – точку касания.
Доказательство. Пусть *α* – плоскость, касательная к шару, и *A* – точка касания. Возьмём произвольную точку *X* плоскости *α*, отличную от *A*. Так как *OA* – перпендикуляр, а *OX* – наклонная, то *OX* > *OA* = *R*. Следовательно, точка *X* не принадлежит шару. Теорема доказана.



Заметим, что если расстояние от центра шара до плоскости больше радиуса шара, то плоскость и шар не

имеют общих точек, поскольку для любой точки плоскости расстояние до центра шара также будет больше радиуса шара.

Определение 176. Прямая, проходящая через точку *A* шаровой поверхности перпендикулярно к радиусу, проведённому в эту точку, называется *касательной*.

Теорема 187. Через любую точку шаровой поверхности проходит бесчисленное множество касательных, все они лежат в касательной плоскости шара.
Доказательство. Действительно, пусть *α* – касательная плоскость шара в точке *A*. Тогда любая прямая в плоскости *α*, проходящая через точку *A*, перпендикулярна радиусу *OA* и, следовательно, является касательной. Пусть *a* – касательная, проходящая через точку *A*. Допустим, что *a* не лежит в плоскости *α*. Тогда взяв какую-нибудь прямую *b*, проходящую через точку *A* в плоскости *α*, проведём через прямые *a* и *b* плоскость, перпендикулярную прямой *OA* и отличную от плоскости *α,* что противоречит теореме 153. Следовательно, касательная *a* лежит в плоскости *α*. Теорема доказана.

§29. Объёмы многогранных тел

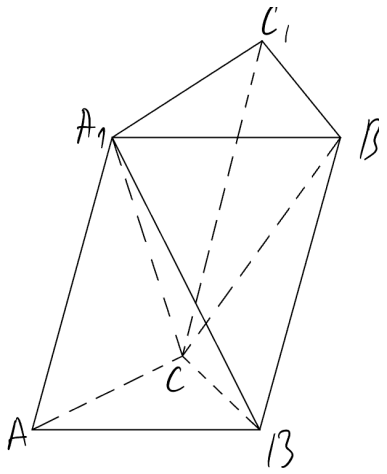
1. Понятие объёма

Для разбиения пространственных фигур сохраняется определение 97.

Определение 176. Тело называется *многогранным*, если его можно разбить на конечное число тетраэдров.

Докажем, что *любая пирамида, основанием которой является выпуклый многоугольник, является многогранным телом*. Основание пирамиды с вершиной *S* можно разбить на треугольники. Построив на этих треугольниках, как основаниях, тетраэдры с вершиной *S* получим разбиение исходной пирамиды на тетраэдры. Действительно, пусть *X* – внутренняя точка одной из полученных пирамид *SKLM*. Точка *X* лежит на отрезке *SO*, где *O* – внутренняя точка треугольника *KLM*. Поскольку точка *O* принадлежит только треугольнику *KLM* (среди треугольников на которые разбито основание исходной пирамиды), точка *X* не является внутренней точкой какого-либо другого из полученных тетраэдров. Следовательно, выполняется первое условие определения 97. Поскольку точка *O* принадлежит основанию исходной пирамиды (но не его границе), точка *X* является внутренней точкой исходной пирамиды и, таким образом, выполняется второе условие определения 97. Любая внутренняя точка *Y* исходной пирамиды лежит на отрезке *SO*, где *O* – точка основания исходной пирамиды и, следовательно, точка *O* принадлежит одному из треугольников разбиения этого основания или его границе. Тогда точка *Y* является внутренней или граничной точкой полученных тетраэдров и, таким образом, выполняется третье условие определения разбиения, а вместе с ним и само определение.

Аналогично доказывается, что *любая призма, основанием которой является выпуклый многоугольник, является многогранным телом*. Для этого заметим, что треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$ разбивается на тетраэдры A_1ABC, $CC_1A_1B_1$ и CBA_1B_1. Действительно, тетраэдру A_1ABC принадлежат точки, находящиеся в полупространстве точки A относительно плоскости BCA_1, два других тетраэдра лежат в другом полупространстве относительно этой плоскости. При этом тетраэдры $CC_1A_1B_1$ и CBA_1B_1 лежат в разных полупространствах относительно плоскости CA_1B_1. Следовательно, тетраэдры разбиения не имеют общих внутренних точек, условие 1 определения 97 выполняется.



Точки каждого из тетраэдров лежат на отрезках, соединяющих одну из вершин призмы и точку на её грани. Точки каждого такого отрезка лежат в полупространстве призмы относительно плоскости каждой её грани и, следовательно, принадлежат призме как пополненному выпуклому многограннику. Значит, второе условие определения также выполняется. Наконец, любая точка призмы лежит относительно плоскостей A_1BC и CA_1B_1 таким образом, что попадает в один из трёх тетраэдров A_1ABC, $CC_1A_1B_1$ и CBA_1B_1, которые, таким образом, составляют разбиение призмы.

Теперь разобьём одинаковым образом основания произвольной призмы на треугольники и соединим вершины соответствующих треугольников отрезками, параллельными боковым рёбрам призмы. Мы получим разбиение на треугольные призмы, каждая из которых в свою очередь разбивается на тетраэдры. Следовательно, призма, основанием которой является выпуклый многоугольник, является многогранным телом.

И в заключение рассмотрим общий случай выпуклого многогранника. Пусть O – внутренняя точка этого многогранника. Тогда многогранник разбивается на пирамиды с вершиной O и основаниями, являющимися гранями многогранника. Действительно, луч с началом в точке O пересекает границу многогранника только в одной точке. Значит, пирамиды разбиения не имеют общих внутренних точек.

Поскольку каждая внутренняя точка X построенных пирамид лежит на отрезке с началом в точке O и концом на грани многогранника, она находится в полупространстве точки O относительно любой грани многогранника и, следовательно, является его внутренней точкой. Обратно, через любую точку Y выпуклого многогранника можно провести луч OY, который пересечёт одну из граней многогранника и, следовательно, будет принадлежать одной из построенных пирамид, либо их границе. Таким образом, все условия разбиения

выпуклого многогранника на пирамиды выполняются. Эти пирамиды в свою очередь можно разбить на тетраэдры. Следовательно, любой выпуклый многогранник является многогранным телом.

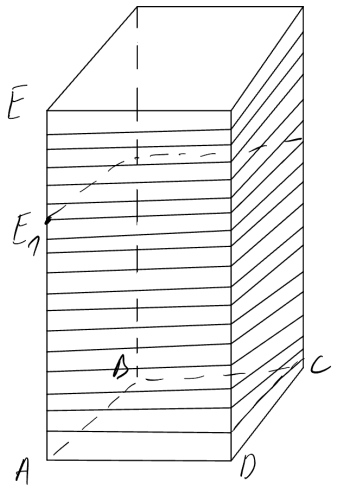
Определение 178. *Объём многогранного тела* это положительная величина, численное значение которой обладает следующими свойствами:

1) равные тела имеют равные объёмы;
2) если тело разбито на многогранные тела, то объём данного тела равен сумме объёмов тел его разбиения;
3) объём куба со стороной, равной единице, равен единице.

2. Объём прямоугольного параллелепипеда

Найдём как должен вычисляться объём прямоугольного параллелепипеда с рёбрами *a, b, c*, выходящими из одной вершины, при условии, что объём существует. Само существование объёма для любого многогранного тела будет доказано в пункте 6.

Сначала докажем, что объёмы двух прямоугольных параллелепипедов с равными основаниями относятся как их высоты. Пусть P и P_1 – два прямоугольных параллелепипеда с общим основанием $ABCD$ и высотами AE и AE_1. Будем считать для определённости, что $AE_1 < AE$. Пусть V и V_1 – объёмы параллелепипедов. Разобьём ребро AE параллелепипеда P на большое число n равных частей, каждая из них равна $\frac{AE}{n}$. Пусть m – число точек деления, которые лежат на ребре AE_1. Тогда $\frac{AE}{n}m \leqslant AE_1 \leqslant \frac{AE}{n}(m+1)$.



Отсюда $\frac{m}{n} \leqslant \frac{AE_1}{AE} \leqslant \frac{m}{n} + \frac{1}{n}$.

Проведём через точки деления плоскости, параллельные основанию. Они разобьют параллелепипед P на n равных параллелепипедов. Каждый из них имеет объём $\frac{V}{n}$.

Параллелепипед P_1 содержит первые m параллелепипедов, считая снизу, и содержится в $m + 1$ параллелепипедах. Поэтому $\frac{V}{n}m \leqslant V_1 \leqslant \frac{V}{n}(m+1)$. Отсюда $\frac{m}{n} \leqslant \frac{V_1}{V} \leqslant \frac{m}{n} + \frac{1}{n}$.

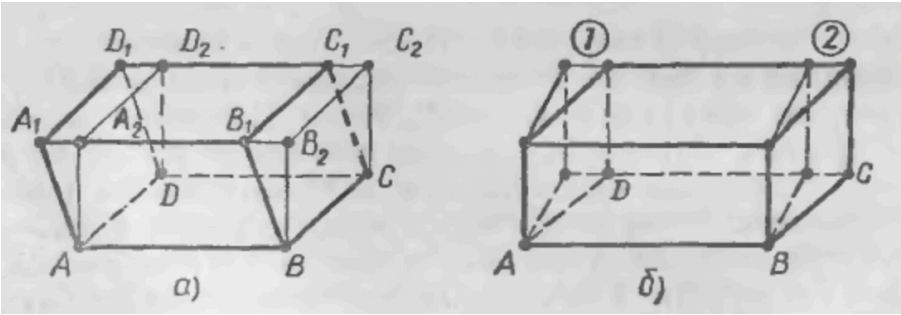
Таким образом, оба числа $\frac{V_1}{V}$ и $\frac{AE_1}{AE}$ заключены между $\frac{m}{n}$ и $\frac{m}{n}+\frac{1}{n}$. Поэтому они отличаются не более чем на $\frac{1}{n}$. А так как *n* можно взять сколь угодно большим, то эти числа отличаются сколь угодно мало, что может быть только при $\frac{V_1}{V}=\frac{AE_1}{AE}$.

Возьмём теперь куб со стороной, равной единице (согласно определению 178 его объём так же равен единице) и три прямоугольных параллелепипеда с измерениями *a*, 1, 1; *a, b*, 1; *a, b, c*. Обозначим их объёмы V_1, V_2 и *V* соответственно. По доказанному $\frac{V_1}{1}=\frac{a}{1}$, $\frac{V_2}{V_1}=\frac{b}{1}$, $\frac{V}{V_2}=\frac{c}{1}$. Перемножая эти три равенства почленно, получим

$$V = abc.$$

3. Объём наклонного параллелепипеда

Найдём объём наклонного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с тупыми углами A_1AB A_1AD и ABC. Проведём через ребро BC плоскость, перпендикулярную основанию $ABCD$, и дополним параллелепипед треугольной призмой $BB_1B_2CC_1C_2$. Отсечём теперь от полученного тела треугольную призму плоскостью, проходящей через ребро AD и перпендикулярную основанию $ABCD$. Тогда получим снова параллелепипед. Этот параллелепипед имеет объём, равный объёму исходного параллелепипеда. Действительно, достроенная призма и отсекаемая совмещаются параллельным переносом на отрезок AB, следовательно, имеют одинаковые объёмы. При описанном преобразовании параллелепипеда сохраняются площадь его основания и высота. Сохраняются также плоскости двух боковых граней, а две другие становятся перпендикулярными основанию. Применяя ещё раз такое преобразование к наклонным граням AA_2B_2B и DD_2C_2C, получим параллелепипед у которого все боковые грани перпендикулярны основанию, то есть прямой параллелепипед. Полученный прямой параллелепипед подвергнем аналогичному преобразованию в прямоугольный параллелепипед, дополняя его сначала призмой 1, а затем отсекая призму 2. Это преобразование также сохраняет объём параллелепипеда, площадь основания и высоту.

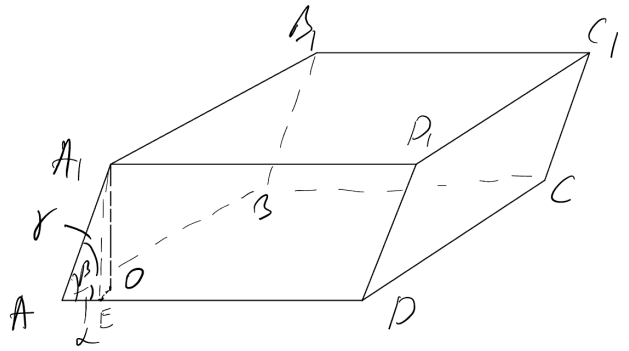


Объём прямоугольного параллелепипеда равен произведению его линейных размеров. Произведение двух линейных размеров есть площадь основания параллелепипеда, а третий размер – его высота. Таким образом, у прямоугольного

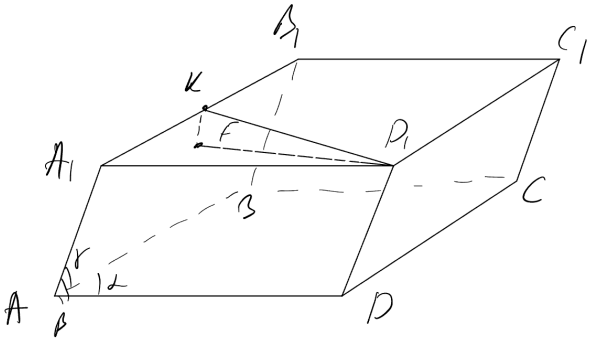
параллелепипеда объём равен произведению площади основания на высоту. Так как при описанном выше преобразовании данного параллелепипеда в прямоугольный на каждом шаге сохраняются объём, площадь основания и высота, то и у исходного параллелепипеда объём равен произведению площади основания на высоту.

Итак, *объём любого параллелепипеда равен произведению площади основания на высоту.*

Покажем, что объём параллелепипеда не зависит от того, какая из его граней принимается за основание. Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – данный параллелепипед. Обозначим через α, β, γ – плоские углы трёхгранного угла параллелепипеда при вершине A: $\angle BAD = \alpha$, $\angle A_1AD = \beta$, $\angle A_1AB = \gamma$. Двугранные углы при рёбрах угла A обозначим a, b и c: при ребре AA_1 – a, AB – b, AD – c. Опустим из вершины A_1 перпендикуляр A_1O на плоскость ABC и перпендикуляр A_1E на прямую AD. Примем грань $ABCD$ за основание параллелепипеда. Тогда его площадь $S = AB \cdot AD \sin \alpha$.



Высота параллелепипеда $A_1O = A_1E \sin c = AA_1 \sin \beta \sin c$. Получаем формулу для объёма: $V = AB \cdot AD \cdot AA_1 \sin \alpha \sin \beta \sin c$.

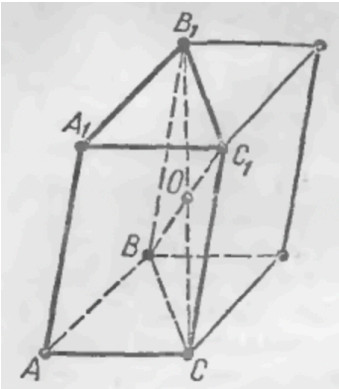


Теперь примем за основание грань AA_1B_1B. Проведём к ней высоту D_1F и опустим перпендикуляр D_1K к прямой A_1B_1. Площадь грани AA_1B_1B: $S = AB \cdot AA_1 \sin \gamma$. Высота параллелепипеда $D_1F = D_1K \sin b = AD \sin \alpha \sin b$. Получаем формулу объёма: $V = AB \cdot AD \cdot AA_1 \sin \alpha \sin \gamma \sin b$.

Из теоремы синусов для трёхгранного угла получаем $\sin \gamma \sin b = \sin \beta \sin c$, следовательно, полученные формулы для объёмов равны. Аналогично проверяется случай, когда за основание принимается грань AA_1D_1D. Таким образом, объём параллелепипеда не зависит от того, какая грань принята за основание.

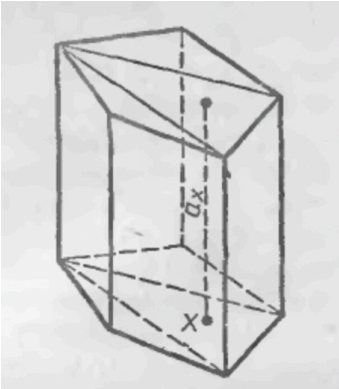
4. Объём призмы

Найдём объём призмы, основанием которой является выпуклый многоугольник. Рассмотрим сначала треугольную призму. Дополним её до параллелепипеда, как



указано на рисунке. Точка *O* является центром симметрии параллелепипеда. Поэтому достроенная призма симметрична исходной относительно точки *O*, следовательно, имеет объём, равный объёму исходной призмы. Таким образом, объём построенного параллелепипеда равен удвоенному объёму данной призмы.

Объём параллелепипеда равен произведению площади его основания на высоту. Площадь его основания равна удвоенной площади треугольника *ABC*, а высота равна высоте исходной призмы. Отсюда заключаем, что объём исходной призмы равен произведению её основания на высоту.



Рассмотрим теперь призму в основании которой произвольный выпуклый многоугольник. Разобьём этот многоугольник на треугольники. Пусть Δ – один из этих треугольников. Проведём через произвольную точку *X* треугольника Δ прямую, параллельную боковым рёбрам. Пусть a_x – отрезок этой прямой, принадлежащей призме. Когда точка *X* описывает треугольник Δ, отрезки a_x заполняют треугольную призму. Построив такую призму для каждого треугольника Δ, мы получим разбиение данной призмы на треугольные. Все эти призмы имеют одну и ту же высоту, равную высоте исходной призмы.

Объём данной призмы равен сумме объёмов составляющих её треугольных призм. По доказанному объём треугольной призмы равен произведению площади её основания на высоту. Отсюда следует, что объём данной призмы равен

$$V = S_1H + S_2H + \ldots + S_nH = (S_1 + S_2 + \ldots + S_n)H,$$

где $S_1, S_2, \ldots, S_n$ – площади треугольников Δ, на которые разбито основание призмы, а *H* – высота призмы. Сумма площадей треугольников Δ равна площади $S_{осн}$ основания данной призмы. Поэтому

$$V = S_{осн} \cdot H.$$

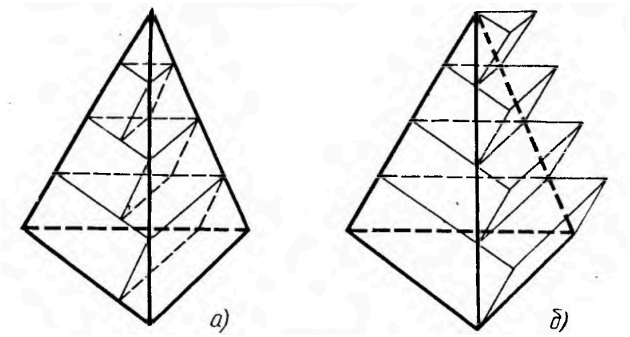
Итак, *объём призмы равен произведению площади её основания на высоту*.

5. Объём пирамиды

Определение 179. Два тела называются *равновеликими*, если они имеют равные объёмы.

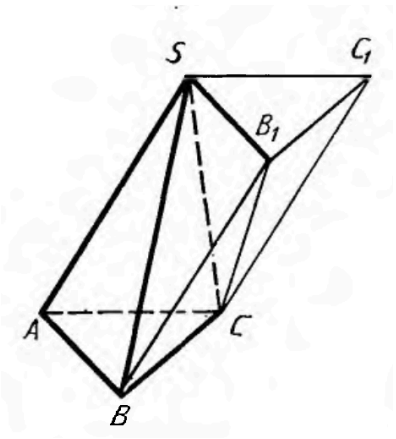
Лемма 25. Две треугольные пирамиды с равными площадями оснований и равными высотами равновелики.

Доказательство. Разделим высоты каждой пирамиды на n равных частей и проведём через точки деления плоскости, параллельные основаниям. Эти плоскости разбивают пирамиду на n слоёв. Для каждого слоя первой пирамиды построим содержащуюся в нём призму, как показано на рисунке а), а для каждого слоя второй пирамиды построим призму, содержащую слой, как показано на рисунке б). Призма в k-м (считая от вершины) слое первой пирамиды и призма, содержащая (k – 1)-й слой второй пирамиды, имеют равные площади оснований, так как эти основания подобны основаниям пирамид и коэффициент подобия один и тот же $\frac{k}{n}$. Так как у этих призм и высоты одинаковы $\frac{H}{n}$, то они имеют равные объёмы.



Пусть V_1 и V_2 – объёмы пирамид, а V_1' и V_2' – суммы объёмов построенных для них призм. Так как объём призмы в k-м слое первой пирамиды равен объёму призмы (k – 1)-го слоя второй пирамиды, то сумма объёмов всех призм для первой пирамиды равна сумме объёмов призм всех слоёв второй пирамиды, кроме последнего. Объём призмы последнего слоя равен $S\frac{H}{n}$, где S – площадь основания пирамиды, а H – высота. Отсюда следует, что $V_1' = V_2' - S\frac{H}{n}$. Так как, кроме того, $V_1 > V_1'$, а $V_2 < V_2'$, то $V_1 > V_2 - S\frac{H}{n}$, или $V_2 - V_1 < S\frac{H}{n}$. Это неравенство выполняется при любом сколь угодно большом n. А это возможно только при $V_2 - V_1 \leqslant 0$, то есть при $V_2 \leqslant V_1$. Поменяв ролями пирамиды, получим противоположное неравенство $V_2 \geqslant V_1$. А отсюда следует, что $V_1 = V_2$. Лемма доказана.

Пусть $SABC$ – треугольная пирамида с вершиной S и основанием ABC. Дополним эту пирамиду до треугольной призмы с тем же основанием и высотой, как показано на рисунке. Эта призма составлена из трёх пирамид: данной пирамиды $SABC$ и ещё двух треугольных пирамид SCC_1B_1 и $SCBB_1$.



У второй и третьей пирамид равные основания – треугольники CC_1B_1 и B_1BC и общая высота, проведённая из вершины S. Поэтому у них равные объёмы.

У первой и третьей пирамид тоже равные основания – треугольники *SAB* и BB_1S и совпадающие высоты, проведённые из вершины *C*. Поэтому у них тоже равные объёмы.

Значит, все три пирамиды имеют один и тот же объём. Так как сумма этих объёмов равна объёму призмы, то объёмы пирамид равны $\frac{SH}{3}$.

Итак, получаем, что *объём треугольной пирамиды равен одной трети произведения площади основания на высоту*: $V = \frac{1}{3}SH$.

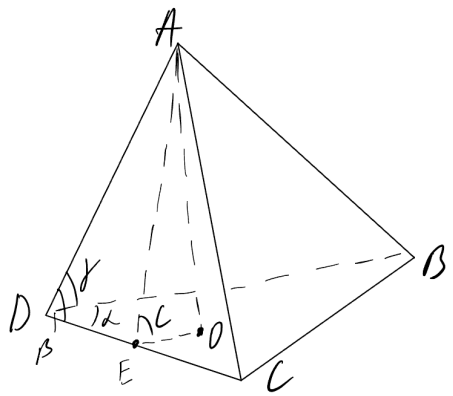
Пусть теперь имеем произвольную пирамиду в основании которой многоугольник, являющийся многоугольной фигурой. Разобьём основание на треугольники $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \ldots, \Delta_n$. Пирамиды, у которых основаниями являются эти треугольники, а вершинами – вершина данной пирамиды, составляют данную пирамиду. Объём данной пирамиды равен сумме объёмов составляющих её пирамид. Так как все они имеют ту же высоту *H*, что и данная пирамида, то объём её равен:

$$V = \frac{1}{3}H(S_1 + S_2 + \ldots + S_n) = \frac{1}{3}SH.$$

Итак, *объём пирамиды равен одной трети произведения площади её основания на высоту*:

$$V = \frac{1}{3}SH.$$

Докажем, что в треугольной пирамиде произведение площади основания на проведённую к нему высоту не зависит от выбора основания. Пусть *DABC* – данная треугольная пирамида. Обозначим через *α, β, γ* – плоские углы трёхгранного угла пирамиды при вершине *D*: ∠*BDC* = *α*, ∠*ADC* = *β*, ∠*ADB* = *γ*.

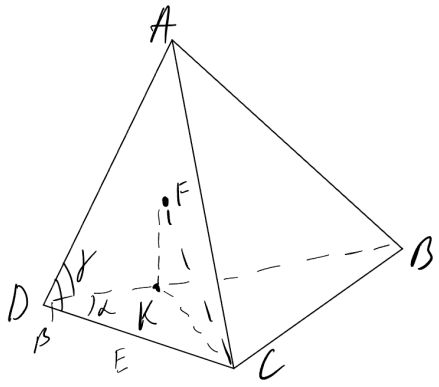


Двугранные углы при рёбрах трёхгранного угла *D* обозначим *a, b* и *c*: при ребре *DA* – *a, DB* – *b, DC* – *c*. Опустим из вершины *A* перпендикуляр *AO* на плоскость *BDC* и перпендикуляр *AE* на прямую *DC*. Примем грань *BCD* за основание пирамиды. Тогда его площадь $S = \frac{1}{2}DB \cdot DC \cdot \sin\alpha$.

Высота пирамиды *AO* = *AE* sin *c* = *DA* sin *β* sin *c*. Получаем формулу для объёма:

$$V = \frac{1}{6}DA \cdot DB \cdot DC \cdot \sin\alpha \sin\beta \sin c.$$

Теперь примем за основание грань *ADB*. Проведём к ней высоту *CF* и опустим перпендикуляр *CK* к прямой *DB*. Площадь грани *ADB:* $S = \frac{1}{2} DB \cdot DA \cdot \sin\gamma$. Высота пирамиды *CF* = *CK* sin *b* = *DC* sin *α* sin *b.* Получаем формулу объёма:



$$V = \frac{1}{6} DA \cdot DB \cdot DC \cdot \sin\alpha \sin\gamma \sin b.$$

Из теоремы синусов для трёхгранного угла с вершиной *D* получаем sin *β* sin *c* = sin *γ* sin *b,* следовательно, полученные формулы для объёмов равны. Таким образом, объём пирамиды не зависит от того, какая грань принята за основание.

6. Объёмы многогранных тел

Из определения объёма следует, что объём треугольной пирамиды должен быть равен одной трети произведения площади основания на высоту. Тогда для любого многогранного тела объём может быть найден как сумма объёмов треугольных пирамид его разбиения. Для того, чтобы этот способ определения объёма был корректен, требуется доказать, что при этом будут выполняться свойства объёма из определения 178 и объём многогранного тела не будет зависеть от способа разбиения его на тетраэдры. Поэтому в доказательствах данного пункта мы будем опираться только на определение объёма тетраэдра как одной трети произведения площади основания на высоту, не пользуясь свойствами из определения 178 (ведь их выполнение мы и хотим доказать).

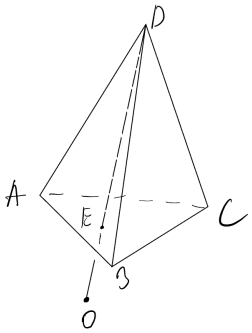
Лемма 26. Если основание *BCD* треугольной пирамиды *ABCD* разбито на треугольники, то сумма объёмов тетраэдров с вершиной *A* и основаниями, являющимися треугольниками разбиения, равна объёму пирамиды *ABCD*.
Доказательство. Исходная пирамида *ABCD* разбита на тетраэдры, высоты которых совпадают с высотой *H* исходной пирамиды, а сумма площадей $S_1, S_2, \ldots S_n$ их оснований равна площади *S* основания *BCD* исходной пирамиды. Таким образом, сумма объёмов тетраэдров разбиения равна объёму пирамиды *ABCD:*

$$V_1 + V_2 + \ldots V_n = \frac{1}{3} S_1 H + \frac{1}{3} S_2 H + \ldots + \frac{1}{3} S_n H = \frac{1}{3}(S_1 + S_2 + \ldots + S_n) H = \frac{1}{3} SH.$$

Лемма доказана.

Лемма 27. Если точка *O* расположена в части пространства, ограниченной трёхгранным углом *DABC*, и находится по разные стороны с точкой *D* относительно плоскости *ABC*, то отрезок *DO* пересекает плоскость *ABC* во внутренней точке *E* треугольника *ABC*.

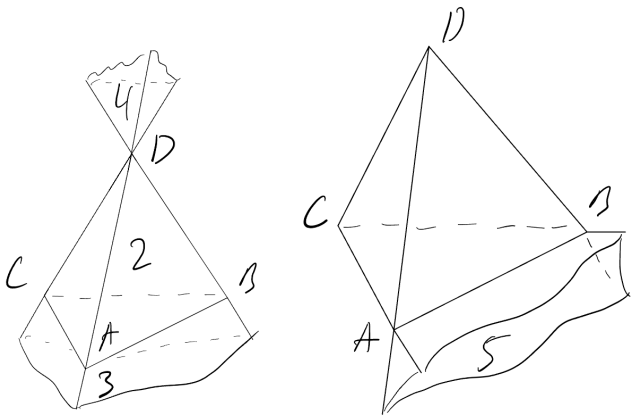
Доказательство. Точка *O* лежит в одном полупространстве с каждой из точек *A, B, C* относительно плоскости, содержащей противоположную грань трёхгранного угла, но в разных полупространствах с точкой *D* относительно плоскости *ABC*. Допустим, прямая *DO* пересекает плоскость *ABC* в точке *E*, не являющейся внутренней точкой треугольника *ABC* (¬). Тогда она и одна из вершин треугольника *ABC* лежат в разных полуплоскостях относительно прямой, содержащей сторону треугольника. Пусть, например, вершина *A* и точка *E* лежат в разных полуплоскостях относительно *BC*. Тогда отрезок *AE* пересекает прямую *BC*, а с ней и плоскость *BDC*. Значит, точки *A* и *E* лежат в разных полупространствах относительно плоскости *BDC*. Прямая *DO* пересекает плоскость *BDC* в точке *D*, не принадлежащей отрезку *EO*, следовательно, точка *O* тоже лежит в разных полупространствах с точкой *A* относительно плоскости *BDC*, что противоречит условию ⊗. Значит, точка *E* является внутренней точкой треугольника *ABC*. Лемма доказана.



Пусть дан произвольный тетраэдр *ABCD* и произвольная точка *O*. Соединим точку *O* с вершинами тетраэдра *ABCD*, получим четыре пирамиды *OABC, OBCD, OABD* и *OACD*. Можно сказать, что каждый из этих тетраэдров получается из пирамиды *ABCD* заменой одной из её вершин на точку *O*. Мы будем называть тетраэдр с вершиной *O* *положительным*, если точка *O* лежит по одну сторону с вершиной, которую она заменила в пирамиде *ABCD*, относительно плоскости, противолежащей этой вершине, и *отрицательным*, если по разные.

Лемма 28. Если некоторую точку *O* соединить с четырьмя вершинами данной треугольной пирамиды, то разность между суммой объёмов положительных и суммой объёмов отрицательных тетраэдров равняется объёму данной пирамиды.
Доказательство. Заметим, что плоскости, содержащие грани треугольной пирамиды, разбивают пространство на пятнадцать частей. Действительно, обозначим $П_A$ полупространство точки *A* относительно плоскости *BCD*, $П_B$ полупространство точки *B* относительно плоскости *ACD* и так далее. Пересечения этих и дополнительных к ним полупространств дают 15 частей пространства: $П_A П_B П_C П_D$, $П_A П_B П_C$(доп. $П_D$), $П_A П_B$(доп. $П_C$)$П_D$, …, $П_A$(доп. $П_B$)(доп. $П_C$)(доп. $П_D$). Шестнадцатый вариант – (доп. $П_A$)(доп. $П_B$)(доп. $П_C$)(доп. $П_D$) не содержит точек.

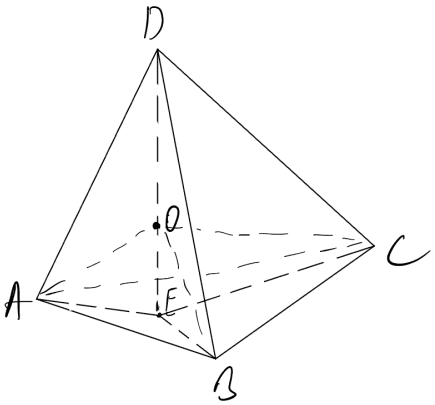
Рассмотрим пять случаев расположения точки *O*: 1) точка *O* лежит в плоскости грани пирамиды *ABCD*; 2) точка O является внутренней точкой пирамиды *ABCD* (то есть принадлежит пересечению $П_A П_B П_C П_D$); 3) точка *O* принадлежит пересечению $П_A П_B П_C$(доп. $П_D$), то есть лежит внутри трёхгранного угла, задаваемого ребрами пирамиды *ABCD*; 4) точка *O* принадлежит пересечению (доп. $П_A$)(доп. $П_B$)(доп. $П_C$)$П_D$, то есть лежит внутри трёхгранного угла, образованного лучами, дополнительными к лучам, задаваемым рёбрами пирамиды; 5) точка *O* принадлежит пересечению



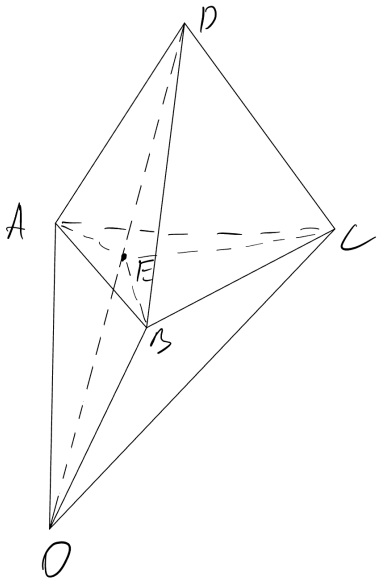
$П_A П_B$(доп. $П_C$)(доп. $П_D$), лежащему между трёхгранными углами, задаваемыми рёбрами пирамиды.

1)Точка *O* лежит в плоскости некоторой грани (например, *ABC*) треугольной пирамиды *ABCD*. Заметим, что положительность или отрицательность треугольников *OCB, OAC, OAB* (если они существуют) в смысле леммы 15 совпадает с положительностью или отрицательностью тетраэдров *DOCB, DOAC, DOAB* (если они существуют). Поскольку у этих тетраэдров высота, проведённая из вершины *D* одинаковая, а разность между суммой площадей положительных оснований и суммой площадей отрицательных оснований, даёт площадь треугольника *ABC*, получаем, что и соответствующая разность для их объёмов даёт объём пирамиды *ABCD*.

2) Пусть теперь точка O является внутренней точкой пирамиды *ABCD*. Обозначим *E* точку пересечения прямой *DO* с гранью *ABC*. Соединив эту точку с вершинами основания получим разбиение пирамиды *ABCD* на тетраэдры *DABE, DBCE* и *DEAC*. Каждый из них также разбивается на два тетраэдра: *OBAE* и *OBAD, OCBE* и *OCBD, OAEC* и *OACD*. Тогда по лемме 26 получаем:



$$V_{ABCD} = V_{DABE} + V_{DBCE} + V_{DEAC} = V_{OBAE} + V_{OBAD} + V_{OCBE} + V_{OCBD} + V_{OAEC} + V_{OACD} = V_{OBAD} + V_{OCBD} + V_{OACD} + (V_{OBAE} + V_{OCBE} + V_{OAEC}) = V_{OBAD} + V_{OCBD} + V_{OACD} + V_{OBAC};$$



3) Точка *O* лежит вне пирамиды *ABCD*, внутри трёхгранного угла *DABC*. В этом случае прямая *OD* пересекает плоскость *ABC* во внутренней точке *E* треугольника *ABC* (лемма 27). Тогда по лемме 26:

$V_{OABD} = V_{EABO} + V_{EABD}$;

$V_{OBCD} = V_{EBCO} + V_{EBCD}$;

$V_{OACD} = V_{EACO} + V_{EACD}$.

Отсюда:

$V_{EABD} = V_{OABD} - V_{EABO}$;

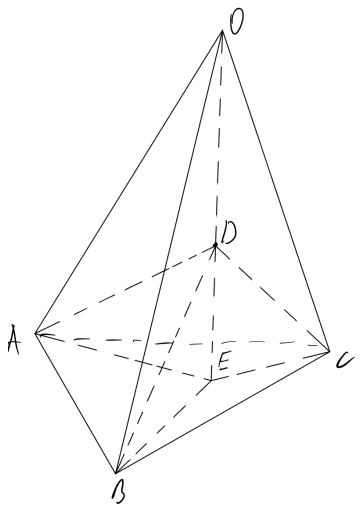
$V_{EBCD} = V_{OBCD} - V_{EBCO}$;

$V_{EACD} = V_{OACD} - V_{EACO}$.

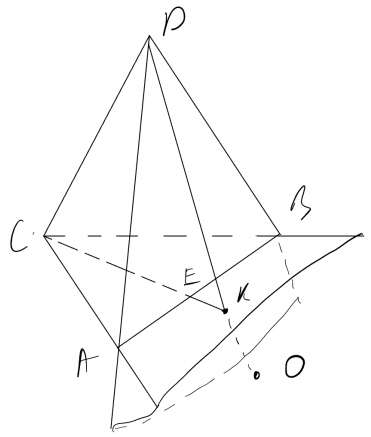
Получаем:

$V_{ABCD} = V_{EABD} + V_{EBCD} + V_{EACD} = V_{OABD} - V_{EABO} + V_{OBCD} - V_{EBCO} + V_{OACD} - V_{EACO} = (V_{OABD} + V_{OBCD} + V_{OACD}) - (V_{EABO} + V_{EBCO} + V_{EACO}) = (V_{OABD} + V_{OBCD} + V_{OACD}) - V_{OABC}$.

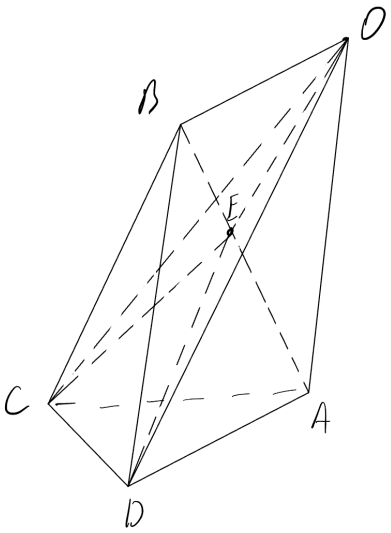
4) Точка O лежит вне пирамиды $ABCD$, внутри трёхгранного угла, образованного лучами, дополнительными к лучам DA, DB и DC. В этом случае, аналогично лемме 27 доказывается, что прямая OD пересекает плоскость ABC во внутренней точке E треугольника ABC. Тогда по лемме 26:



$V_{OABE} = V_{DABE} + V_{OABD}$;
$V_{OBCE} = V_{DBCE} + V_{OBCD}$;
$V_{OACE} = V_{DEAC} + V_{OACD}$.
Отсюда:
$V_{DABE} = V_{OABE} - V_{OABD}$;
$V_{DBCE} = V_{OBCE} - V_{OBCD}$;
$V_{DEAC} = V_{OACE} - V_{OACD}$;
Получаем:
$V_{ABCD} = V_{DABE} + V_{DBCE} + V_{DEAC} = V_{OABE} - V_{OABD} + V_{OBCE} - V_{OBCD} + V_{OACE} - V_{OACD} = (V_{OABE} + V_{OBCE} + V_{OACE}) - (V_{OABD} + V_{OBCD} + V_{OACD}) = V_{OABC} - (V_{OABD} + V_{OBCD} + V_{OACD})$.



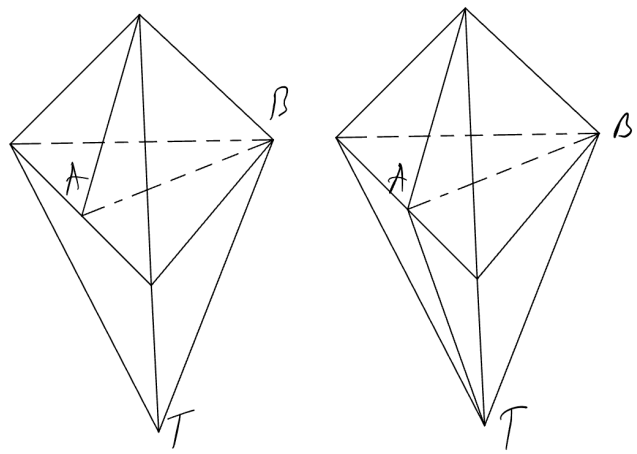
5) Пусть точка O принадлежит пересечению $П_A П_B$(доп. $П_C$)(доп. $П_D$). В этом случае плоскость ODC пересекает отрезок AB в некоторой точке E. Действительно, отрезок DO пересекает плоскость ABC в некоторой точке K, которая лежит в разных полуплоскостях с точкой C относительно прямой AB. Отрезок CK пересекается с прямой AB в некоторой точке E. Луч DO, которому принадлежит точка K, лежит в одном полупространстве с точкой B относительно плоскости ACD. Луч CK, которому принадлежит точка E, целиком лежит в одном полупространстве относительно плоскости CAD. Следовательно, точки K и E лежат в одном полупространстве с точкой B относительно плоскости ACD. Значит, точка E не может принадлежать лучу, дополнительному AB. Аналогично доказывается, что она не может принадлежать лучу дополнительному BA. Следовательно, точка E лежит на отрезке AB.



Тогда по лемме 26:
$V_{OBDA} = V_{OEBD} + V_{OEDA}$;
$V_{OABC} = V_{OBCE} + V_{OACE}$;
$V_{OCDA} = V_{AOCD} = V_{AEDO} + V_{AECO} + V_{AECD}$;
$V_{OCDB} = V_{BOCD} = V_{BECO} + V_{BEDO} + V_{BECD}$;

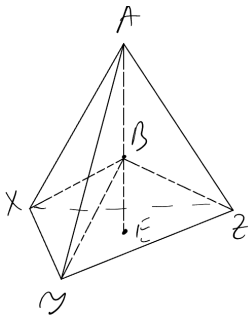
Из последних двух равенств:
$V_{AECD} = V_{OCDA} - V_{AEDO} - V_{AECO}$;
$V_{BECD} = V_{OCDB} - V_{BECO} - V_{BEDO}$;
Получаем:
$V_{ABCD} = V_{AECD} + V_{BECD} = V_{OCDA} - V_{AEDO} - V_{AECO} + V_{OCDB} - V_{BECO} - V_{BEDO} = V_{OCDA} + V_{OCDB} - (V_{AEDO} + V_{BEDO} + V_{AECO} + V_{BECO}) = V_{OCDA} + V_{OCDB} - (V_{OBDA} + V_{OABC})$. Лемма доказана.

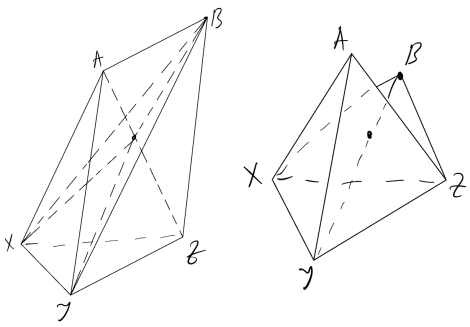
Для следующего доказательства нам понадобятся такие разбиения многогранных тел на тетраэдры, при которых любые два тетраэдра разбиения либо не имеют общих точек, либо имеют общую вершину, либо общее ребро, либо общую грань. Такое разбиение будем называть *правильным*. Одно разбиение многогранного тела называется *измельчением* другого, если всякий тетраэдр первого разбиения содержится в некотором тетраэдре второго. Всякое разбиение многогранного тела обладает правильным измельчением.



Действительно, каждая грань тетраэдра разбиения пересекается с гранями других тетраэдров разбиения, так, что это пересечение производит разбиение грани на выпуклые многоугольники. Все эти многоугольники можно разбить на треугольники так, что любые два из них либо не имеют общих точек, либо имеют общую вершину, либо общую сторону. Теперь выберем внутреннюю точку тетраэдра и соединим с вершинами каждого полученного треугольника в каждой грани. Получим рёбра тетраэдров, которые дают правильное измельчение исходного разбиения многогранной фигуры.

При правильном разбиении любая грань тетраэдра разбиения либо является гранью ещё одного тетраэдра разбиения, либо принадлежит границе многогранного тела. Причём, два тетраэдра такого разбиения, имеющие общее основание *XYZ,* лежат по разные стороны от плоскости *XYZ*. Действительно, если вершина *B* одного из этих тетраэдров является внутренней точкой второго тетраэдра *AXYZ*, то прямая *AB* пересекает основание *XYZ* в точке *E* и точки отрезка *BE* являются общими внутренними точками обоих тетраэдров (опр. 163). Если вершина *B* не является внутренней точкой тетраэдра *AXYZ* и при этом точки *A* и *B* лежат в одном полупространстве относительно плоскости *XYZ*, то боковые грани тетраэдров будут пересекаться, что противоречит условию разбиения. Действительно, если точка *B* лежит внутри трёхгранного угла,





например, *YXAZ*, то отрезок *YB* пересекает грань *XAZ* (лемма 27). Если же точка *B* не лежит внутри какого-либо из трёхгранных углов *YXAZ, ZYAX, XAYZ*, то она принадлежит части пространства 5 (смотри доказательство леммы 28), например, $П_Z П_A$(доп. $П_X$)(доп. $П_Y$). В этом случае отрезок *ZA* пересекает грань *BXY*.

Теорема 188. Каждому многогранному телу можно единственным образом поставить в соответствие его объём.
Доказательство. Поставим в соответствие каждому тетраэдру объём, вычисляемый как одна треть произведения площади его основания на высоту, проведённую к этому основанию. Для любого многогранного тела определим объём как сумму объёмов тетраэдров его разбиения. Покажем, что при этом будут выполняться свойства определения 178 и объём не будет зависеть от способа разбиения тела на тетраэдры.

Докажем, что при правильном разбиении треугольной пирамиды *ABCD* на тетраэдры объём пирамиды *ABCD* равен сумме объёмов тетраэдров этого разбиения. Пусть *PQRS* – какой-нибудь из тетраэдров разбиения. По лемме 28 объём пирамиды *PQRS* можно представить в виде алгебраической суммы объёмов четырёх пирамид *AQRS, PARS, PQAS, PQRA.* Представив таким образом объём каждого тетраэдра разбиения, сложим объёмы всех тетраэдров разбиения. Мы получим сумму объёмов пирамид *AXYZ*, где *XYZ* – грань тетраэдра разбиения. Если грань *XYZ* лежит внутри пирамиды *ABCD*, то объём пирамиды *AXYZ* входит в нашу сумму дважды, потому что *XYZ* является гранью двух тетраэдров разбиения. Так как эти тетраэдры расположены по разные стороны от плоскости *XYZ*, то один из тетраэдров будет положительным, а другой отрицательным. Таким образом, эти слагаемые при вычислении суммы объёмов тетраэдров разбиения, взаимно уничтожаются.

Если грань *XYZ* принадлежит грани *BCD* пирамиды *ABCD*, то объём тетраэдра *AXYZ* входит в нашу сумму только один раз, причём со знаком плюс. Если же грань *XYZ* принадлежит любой из трёх остальных граней пирамиды *ABCD*, то тетраэдра *AXYZ* не существует. В итоге сумма объёмов тетраэдров нашего разбиения равна сумме объёмов пирамид *AXYZ* с гранями *XYZ* в грани *BCD* пирамиды *ABCD*. Тогда по лемме 26 эта сумма равна объёму пирамиды *ABCD*. Итак, объём пирамиды *ABCD* равен сумме объёмов пирамид её разбиения.

Пусть теперь многогранное тело *F* разбито в одном случае на треугольные пирамиды P_1', P_2', P_3', …, а во втором случае – на треугольные пирамиды P_1'', P_2'', P_3'', … Докажем, что суммы объёмов пирамид первого и второго разбиения одинаковы.

Пирамиды первого и второго разбиения, взятые вместе, производят разбиение нашего тела на многогранники. Эти многогранники представляют собой общую часть одной из пирамид первого разбиения и одной из пирамид второго и, следовательно, будут выпуклыми. Действительно, поскольку плоскость каждой грани такого многогранника совпадает с плоскостью одной из граней тетраэдра первого или второго разбиения, то общая внутренняя часть этих тетраэдров (которые сами являются выпуклыми многогранниками) будет лежать только с одной стороны от этой плоскости.

Эти выпуклые многогранники мы разобьём на мелкие пирамиды P_1''', P_2''', P_3''', …, причём, сделаем это так, чтобы любые две пирамиды либо не имели общих точек, либо имели общую вершину, либо общее ребро, либо общую грань. В пункте 1 было показано, что это всегда возможно.

По доказанному объём каждой пирамиды первого разбиения равен сумме объёмов пирамид P_k''', которые в него входят. Точно также объём каждой пирамиды второго разбиения равен сумме объёмов соответствующих пирамид P_k'''. Поэтому суммы объёмов пирамид как первого, так и второго разбиения фигуры F равны сумме объёмов всех пирамид P_k'''. Таким образом, суммы объёмов пирамид первого и второго разбиения равны, то есть объём многогранного тела F не зависит от способа разбиения его на треугольные пирамиды.

Докажем теперь, что определяемый таким способом объём действительно обладает свойствами из определения 178. Первое свойство объёма следует из равенства объёмов равных тетраэдров (у них соответствующие основания равны и опущенные на них высоты тоже равны).

Пусть тело G разбито на многогранные тела G_1, G_2, G_3, … . Пусть тело G_1 разбито на тетраэдры Δ_k', тело G_2 – на тетраэдры Δ_k'', тело G_3 – на тетраэдры Δ_k''', и так далее. При этом получается разбиение тела G на тетраэдры Δ_k', Δ_k'', Δ_k''' … . Объём тела G_1 равен сумме объёмов тетраэдров Δ_k', объём тела G_2 равен сумме объёмов тетраэдров Δ_k'', и так далее. Объём тела G равен сумме объёмов тетраэдров Δ_k', Δ_k'', Δ_k''' … . Следовательно, он равен сумме объёмов тел G_1, G_2, G_3, … . Второе свойство объёмов доказано.

Докажем третье свойство. Куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ со стороной, равной 1, разобьём на шесть тетраэдров, объём каждого из которых равен $\frac{1}{6}$: DAA_1B_1, B_1BCD, $DB_1C_1D_1$, B_1ABD, $DA_1B_1D_1$, B_1C_1CD. Поэтому объём куба равен 1.

Как было доказано ранее, объём треугольной пирамиды определяется единственным образом, следующим из определения объёма. Однозначность в определении объёма треугольной пирамиды влечёт за собой однозначность в определении объёма любого многогранного тела. Теорема доказана.

Отметим ещё одно важное свойство многогранных тел. *Если многогранное тело F разбито на фигуры F_1 и F_2, причём фигура F_1 – многогранное тело, то фигура F_2 тоже является многогранным телом.*

Разобьём тело F на тетраэдры $\Delta'_1, \Delta'_2, \Delta'_3, \ldots$, а фигуру F_1 на тетраэдры $\Delta''_1, \Delta''_2, \Delta''_3, \ldots$ Как и в доказательстве теоремы 188, тетраэдры первого и второго разбиения, взятые вместе, производят разбиение фигуры F на выпуклые многогранники. Эти многогранники можно разбить на тетраэдры $\Delta'''_1, \Delta'''_2, \Delta'''_3, \ldots$. При этом некоторые из тетраэдров Δ'_k могут совпадать с тетраэдрами Δ'''_k. Тогда те из тетраэдров Δ'''_k, которые не относятся к разбиению фигуры F_1, составляют разбиение на тетраэдры фигуры F_2. Следовательно, F_2 тоже является многогранным телом.

7. Объёмы подобных тел. Объём усечённой пирамиды

Пусть T и T' – два подобных многогранных тела. Это значит, что существует преобразование подобия, при котором тело T переходит в тело T'. Обозначим через k коэффициент подобия.

Разобьём тело T на треугольные пирамиды $P_1, P_2, \ldots, P_n$. Объём тела T равен сумме объёмов этих пирамид. Преобразование подобия, которое переводит тело T в тело T', переводит пирамиды $P_1, P_2, \ldots, P_n$ в пирамиды $P_1', P_2', \ldots, P_n'$. Эти пирамиды составляют тело T', и поэтому объём тела T' равен сумме объёмов пирамид $P_1', P_2', \ldots, P_n'$.

Так как пирамиды P_i' и P_i подобны и коэффициент подобия равен k, то отношение их высот равно k, а отношение площадей их оснований равно k^2. Следовательно, отношение объёмов пирамид равно k^3. Так как тело T составлено из пирамид P_i, а тело T' составлено из пирамид P_i', то отношение объёмов тел T и T' тоже равно k^3.

Число k, коэффициент подобия, равно отношению расстояний любых двух соответствующих пар точек при преобразовании подобия. Следовательно, это число равно отношению любых двух соответствующих линейных размеров тел T и T'. Таким образом, мы приходим к следующему выводу.

Объёмы двух подобных тел относятся как кубы соответствующих их линейных размеров.

Воспользуемся этим свойством для определения объёма усеченной пирамиды. Именно, докажем следующую формулу для объёма усечённой пирамиды:

$$V = \frac{1}{3}H(S_1 + \sqrt{S_1S_2} + S_2),$$

где S_1 и S_2 – площади оснований пирамиды, а H – высота пирамиды.

Дополним данную усечённую пирамиду до полной и обозначим H_1 её высоту. Пусть S_1 – площадь её основания. Высоту дополняющей пирамиды обозначим H_2, а площадь основания S_2. Так как пирамиды подобны, то площади их оснований относятся как квадраты высот, а объёмы – как кубы высот, то есть

$$\frac{S_2}{S_1} = \left(\frac{H_2}{H_1}\right)^2,$$

$$\frac{V_2}{V_1} = \left(\frac{H_2}{H_1}\right)^3.$$

Имеем

$$V = V_1 - V_2 = V_1\left(1 - \frac{V_2}{V_1}\right) = V_1\left(1 - \left(\frac{H_2}{H_1}\right)^3\right) = V_1\left(1 - \frac{H_2}{H_1}\right)\left(1 + \frac{H_2}{H_1} + \left(\frac{H_2}{H_1}\right)^2\right) =$$

$$= V_1\left(1 - \frac{H_2}{H_1}\right)\left(1 + \sqrt{\frac{S_2}{S_1}} + \frac{S_2}{S_1}\right) = \frac{V_1}{H_1S_1}(H_1 - H_2)(S_1 + \sqrt{S_1S_2} + S_2).$$

Так как $H_1 - H_2 = H$, а $V_1 = \frac{1}{3}H_1S_1$, то

$$V = \frac{1}{3}H(S_1 + \sqrt{S_1S_2} + S_2).$$

§30. Объём и площадь поверхности тел вращения

1. Общее определение объёма

Определение 180. Пусть для тела T существует как содержащее его многогранное тело, так и содержащееся в нём, и для любого положительного числа ε существует многогранное тело, содержащее границу тела T и имеющее объём меньше ε. Тогда объёмом тела T называется число V, обладающее следующими свойствами: 1) число V не больше объёма любого многогранного тела, содержащего данное тело T; 2) не существует числа, большего V, обладающего свойством 1. Для общности рассуждений будем считать объём фигур, граница которых может быть заключена в многогранные тела сколь угодно малой площади, но не содержащих многогранные тела (например, частей плоскости, все точки которых в пространстве граничные), равным нулю.

Поскольку для тела T существует содержащееся в нём многогранное тело P, объёмы многогранных тел, содержащих T, не меньше объёма P. Тогда из аксиоматики действительных чисел следует, что существует наибольшее число, не большее объёма любого многогранного тела, содержащего T (такое число

называется *точной нижней гранью* объёмов тел, содержащих T). Это число мы и называем объёмом тела T.

В случае многогранных тел данное определение приводит к прежнему значению объёма, так как среди многогранных тел, содержащих данное тело, есть оно само.

Также заметим, что условие существования объёма в определении 180 для многогранных тел выполняется. Действительно, поскольку многогранное тело можно разбить на конечное число тетраэдров, его граница состоит из нескольких конечных частей плоскости, содержащих грани тетраэдров разбиения. Каждую такую часть плоскости можно заключить в квадрат и построить на этом квадрате, как на основании, параллелепипед, высота которого может быть сколь угодно малой. Тогда и объём этого параллелепипеда (как и сумма конечного числа объёмов таких параллелепипедов), может быть сколь угодно малым.

Отметим некоторые свойства объёма, непосредственно вытекающие из его определения.

Если тело T_1 содержится в теле T_2, то объём тела T_1 не больше объёма тела T_2. Действительно, всякое многогранное тело, содержащее тело T_2, содержит и тело T_1. Поэтому объём V_1 тела T_1 не больше объёма этого многогранного тела. А объём V_2 тела T_2 есть наибольшее число, обладающее этим свойством. Следовательно, $V_1 \leqslant V_2$.

Если тела T_1 и T_2 равны, то их объёмы равны. Действительно, если тело T_1 можно заключить в многогранное тело S_1, то тело T_2 можно заключить в многогранное тело S_2, равное S_1. Поэтому V_2 не больше объёма любого многогранного тела, содержащего тело T_1. А объём V_1 – наибольшее число, обладающее этим свойством. Следовательно $V_2 \leqslant V_1$. Поменяв ролями тела T_1 и T_2, приходим к обратному неравенству: $V_1 \leqslant V_2$. Следовательно, $V_1 = V_2$.

Если тела T_1 и T_2 подобны, то их объёмы относятся как кубы линейных размеров. Действительно, если тело T_1 можно заключить в многогранное тело объёма x, то тело T_2 можно заключить в подобное тело объёма k^3x, где k – коэффициент подобия. Поэтому $V_2 \leqslant k^3x$. Следовательно, $\frac{V_2}{k^3} \leqslant x$. Таким образом, число $\frac{V_2}{k^3}$ не больше объёма любого многогранного тела, содержащего тело T_1. Число V_1 есть наибольшее число, обладающее этим свойством. Поэтому $V_1 \geqslant \frac{V_2}{k^3}$. Теперь поменяем ролями тела T_1 и T_2. Тело T_2 можно заключить в многогранное тело объёма x, тогда тело T_1 можно заключить в подобное тело объёма $\frac{x}{k^3}$. Поэтому

$V_1 \leqslant \frac{x}{k^3}$. Следовательно, $V_1k^3 \leqslant x$. Таким образом, число V_1k^3 не больше объёма любого многогранного тела, содержащего тело T_2. Число V_2 есть наибольшее число, обладающее этим свойством. Поэтому $V_1k^3 \leqslant V_2$, или $V_1 \leqslant \frac{V_2}{k^3}$. Сопоставляя полученные неравенства получаем, что $V_1 = \frac{V_2}{k^3}$, или $\frac{V_2}{V_1} = k^3$.

При доказательстве следующего свойства будет использоваться утверждение, что любую ограниченную часть плоскости, цилиндрической, конической или сферической поверхности (то есть боковой поверхности цилиндра, конуса или поверхности сферы) можно заключить в многогранное тело сколь угодно малого объёма. Для плоскости это было доказано выше. Для других поверхностей это свойство будет доказано в следующих пунктах.

Если тело разбивается плоскостью, конической, цилиндрической или сферической поверхностью на два тела, то объём тела равен сумме объёмов тел, на которые оно разбивается[2].

Пусть тело T разбивается таким образом на два тела, T_1 и T_2. Пусть V_1 и V_2 – их объёмы, а V – объём тела T. Пусть ε – малое положительное число. Построим многогранное тело S_1, содержащее тело T_1 и имеющее объём не больше $V_1 + \varepsilon$. Такое тело существует. В противном случае объёмы всех многогранных тел, содержащих T_1, были бы не меньше $V_1 + \varepsilon$. Следовательно, объём тела T_1 тоже был бы не меньше $V_1 + \varepsilon$. Построим многогранное тело S_2, содержащее тело T_2 и объёмом не больше $V_2 + \varepsilon$. Многогранное тело S, составленное из тел S_1 и S_2, будет иметь объём не больше $V_1 + V_2 + 2\varepsilon$. Тело S содержит тело T. Поэтому объём тела T не больше объёма тела S. Следовательно, $V \leqslant V_1 + V_2 + 2\varepsilon$. Так как ε – любое положительное число, то из этого неравенства следует, что $V \leqslant V_1 + V_2$.

Построим теперь многогранное тело S, содержащее тело T, имеющее объём не больше $V + \varepsilon$. Обозначим S_1 и S_2 части разбиения тела S данной поверхностью, содержащие тела T_1 и T_2. Построим многогранное тело P объёма не больше ε, содержащее общую границу фигур S_1 и S_2. Присоединяя тело P к S_1 и S_2, мы получим многогранные тела S_1' и S_2', содержащие тела T_1 и T_2. Сумма объёмов тел S_1' и S_2' не больше $V + 2\varepsilon$. Следовательно, $V_1 + V_2 \leqslant V + 2\varepsilon$. Так как ε сколь угодно мало, то $V_1 + V_2 \leqslant V$. Сопоставляя полученные неравенства заключаем, что $V_1 + V_2 = V$, что и требовалось доказать.

---

[2] Обобщение этого утверждения доказано в конце конспекта.

2. Объём цилиндра и объём конуса

Докажем выполнение условия существования объёма для цилиндра. Построим правильную, вписанную в цилиндр 2^n-угольную призму и правильную описанную 2^n-угольную призму. Вписанная призма содержится в цилиндре, а значит, имеет объём меньше объёма цилиндра. Описанная призма содержит цилиндр, а следовательно, имеет объём больший объёма цилиндра. Если из описанной призмы удалить внутреннюю часть вписанной, то мы получим многогранное тело, содержащее боковую поверхность цилиндра. Объём этого тела равен разности объёмов призм. Как было показано в §17 п. 5 разность площадей оснований этих призм может быть сколь угодно мала. Значит, сколь угодно мало отличаются и объёмы призм. Таким образом, условие из определения 180 выполняется.

Площади оснований обеих призм сколь угодно мало отличаются от площади основания цилиндра, равной πR^2, где R – радиус основания цилиндра. Тогда, площадь основания описанной призмы меньше $\pi R^2 + \varepsilon$, где ε – произвольное положительное число, поэтому её объём не больше $(\pi R^2 + \varepsilon)H$, где H – высота призмы и цилиндра. Площадь основания вписанной призмы больше $\pi R^2 - \varepsilon$, а её объём не меньше $(\pi R^2 - \varepsilon)H$. Объём цилиндра заключён между объёмами призм:

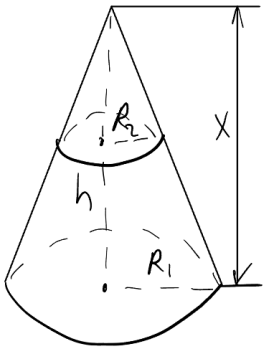
$$(\pi R^2 - \varepsilon)H < V < (\pi R^2 + \varepsilon)H.$$

Отсюда $-H\varepsilon < V - \pi R^2 H < H\varepsilon$, то есть величина $|V - \pi R^2 H|$ сколь угодно мала. А поскольку она имеет вполне определённое значение, то $V - \pi R^2 H = 0$. Таким образом, *объём цилиндра с радиусом основания R и высотой H равен*

$$V = \pi R^2 H.$$

Для конуса построим вписанную и описанную пирамиды в основании которых лежат правильные 2^n-угольники. Если из описанной пирамиды удалить внутреннюю часть вписанной, получим многоугольное тело, содержащее поверхность конуса. Это тело может иметь сколь угодно малый объём. Формула объёма конуса выводится аналогично формуле для цилиндра. *Объём конуса равен одной трети произведения площади основания на высоту:*

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H.$$



Найдем формулу объёма усечённого конуса с радиусами оснований R_1 и R_2 ($R_2 < R_1$) и высотой h. Дополним данный усечённый конус до полного. Пусть x – его высота. Объём усечённого конуса равен разности объёмов двух полных конусов: одного – с радиусом основания R_1 и высотой x, другого – с радиусом основания R_2 и высотой $x - h$. Из

подобия конусов получаем $\frac{x}{x-h}=\frac{R_1}{R_2}$, откуда $x=\frac{hR_1}{R_1-R_2}$. Объём усечённого конуса равен

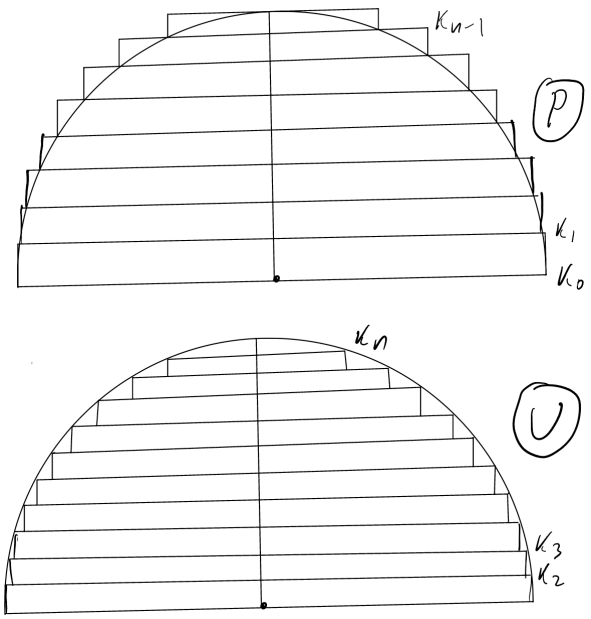
$$V=\frac{1}{3}\left(\pi R_1^2\frac{hR_1}{R_1-R_2}-\pi R_2^2\left(\frac{hR_1}{R_1-R_2}-h\right)\right)=\frac{1}{3}\pi h\frac{R_1^3-R_2^3}{R_1-R_2}=\frac{1}{3}\pi h\left(R_1^2+R_1R_2+R_2^2\right).$$

Окончательно:

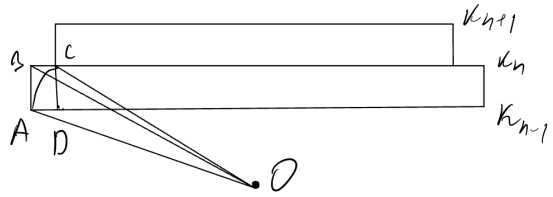
$$V=\frac{1}{3}\pi h\left(R_1^2+R_1R_2+R_2^2\right).$$

3. Объём шара

Докажем существование и найдём формулу для объёма шара. Плоскость, проходящая через центр шара, делит его на два симметричных (следовательно, равных) *полушара* (т. 185). Поэтому достаточно найти объём полушара. Пусть ε – произвольное положительное число. Возьмём натуральное число *n*, большее чем $\frac{\pi R^3}{\varepsilon}$, и разделим радиус, перпендикулярный к плоскости основания полушара, на *n* равных частей. Через точки деления проведём плоскости, параллельные плоскости основания, и обозначим круги, получившиеся в сечениях, через K_0, K_1 …, K_{n-1}, где K_0 – основание полушара, K_1 – ближайший к нему круг. Построим на каждом круге, как основании, цилиндр высотой *R*/*n*. Обозначим тело, состоящее из этих цилиндров, через *P*. Опустим тело *P* вниз на расстояние *R*/*n*. Тогда все цилиндры тела *P*, начиная со второго (у которого основание K_1) окажутся внутри полушара. Обозначим тело, составленное из этих цилиндров, через *U*.



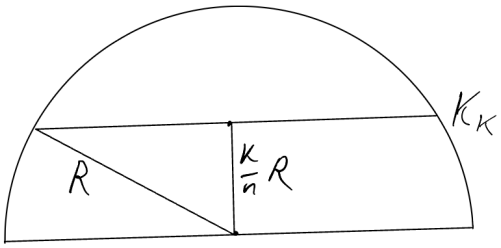
Полушар содержится внутри тела *P* и содержит тело *U*. Для доказательства рассмотрим сечение полушара и тел *P* и *U*, содержащее радиус, перпендикулярный плоскости основания. Это сечение является полукругом. Дуга *AC* лежит между диаметрами кругов K_{n-1} и K_n. Поскольку чем дальше хорда от центра, тем она меньше, получаем, что точки дуги находятся внутри прямоугольника *ABCD*. Действительно, угол *BAO* тупой, следовательно, *OB*' > *OA* = *R*, где *B*' – произвольная точка отрезка *AB*. Значит, все точки дуги *AC* лежат в одной полуплоскости относительно прямой *AB*. С другой стороны все точки дуги *AC*



лежат по разные стороны с отрезком *CD* относительно хорды *AC*. Следовательно, дуга *AC* находится внутри прямоугольника *ABCD*. Тогда и вся часть сферы, лежащая между плоскостями кругов K_{n-1} и K_n лежит между двумя поверхностями вложенных друг в друга цилиндров с основаниями K_{n-1} и K_n.

Если удалить из тела *P* внутреннюю часть тела *U*, объём полученного тела *M* будет равен объёму цилиндра с основанием K_0, то есть $\frac{\pi R^3}{n} < \varepsilon$. Тогда существует многогранное тело, содержащее тело *M*, и имеющее объём $\frac{\pi R^3}{n} + \varepsilon < 2\varepsilon$. Поскольку число ε может быть сколько угодно малым, заключаем, что полусферу можно поместить в многогранное тело сколь угодно малого объёма. Значит, условия определения 180 выполняются для тел, ограниченных сферической поверхностью.

Так как расстояние между центром круга K_k и центром круга K_0 равно kR/n, то квадрат радиуса круга K_k равен $R^2 - \left(\frac{k}{n}R\right)^2$, и поэтому площадь этого круга равна $S_k = \pi R^2\left(1 - \frac{k^2}{n^2}\right)$. Тогда объём цилиндра с основанием K_k равен $V_k = \frac{\pi R^3}{n}\left(1 - \frac{k^2}{n^2}\right)$.



Найдём объёмы тел *P* и *U*. Тело *P* состоит из *n* цилиндров, наибольший из которых имеет основание K_0. Сложим объёмы V_k этих цилиндров, где $k = 0, \ldots, n-1$:

$$V_P = \frac{\pi R^3}{n}\left(1 - 0 + 1 - \frac{1}{n^2} + 1 - \frac{4}{n^2} + \ldots + 1 - \frac{(n-1)^2}{n^2}\right) = \frac{\pi R^3}{n}\left(n - \frac{1}{n^2}\left(1 + 4 + \ldots + (n-1)^2\right)\right) =$$

$$= \pi R^3\left(1 - \frac{1}{n^3}\left(1 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2\right)\right).$$

Тело *U* состоит из $n - 1$ цилиндра, наибольший из которых имеет основание K_1. Сложим объёмы V_k этих цилиндров, где $k = 1, \ldots, n-1$:

$$V_U = \frac{\pi R^3}{n}\left(1 - \frac{1}{n^2} + 1 - \frac{4}{n^2} + \ldots + 1 - \frac{(n-1)^2}{n^2}\right) = \frac{\pi R^3}{n}\left(n - 1 - \frac{1}{n^2}\left(1 + 4 + \ldots + (n-1)^2\right)\right) =$$

$$= \pi R^3\left(1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n^3}\left(1 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2\right)\right) = \pi R^3\left(1 - \frac{1}{n^3}\left(1 + 2^2 + \ldots + n^2\right)\right).$$

Методом математической индукции докажем два неравенства:

$$1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2 < \frac{n^3}{3}, \quad 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 > \frac{n^3}{3}.$$

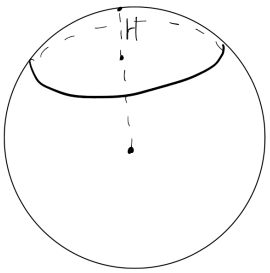
При $n = 1$ неравенства очевидны. При переходе от n к $n + 1$ первая сумма возрастает на n^2, вторая – на $(n + 1)^2$, а $n^3/3$ возрастает на

$$\frac{(n+1)^3}{3} - \frac{n^3}{3} = n^2 + n + \frac{1}{3},$$

что больше n^2, но меньше $(n + 1)^2$. Следовательно, неравенства верны при любом натуральном n.

Тогда получаем, что $V_U \leqslant \frac{2\pi R^3}{3} \leqslant V_P$. С другой стороны, поскольку тело P содержит полушар, а тело U содержится в полушаре, имеем $V_U \leqslant V' \leqslant V_P$, где V' – объём полушара. Тогда $\left| V' - \frac{2\pi R^3}{3} \right| \leqslant V_P - V_U = \frac{\pi R^3}{n} < \varepsilon$. Так как ε произвольно, то $V' = \frac{2\pi R^3}{3}$. Значит, объём шара:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3.$$



Шаровым сегментом называется часть шара, отсекаемая от него плоскостью. Объём шарового сегмента вычисляется по формуле

$$V = \pi H^2 \left(R - \frac{H}{3} \right),$$

где R – радиус шара, а H – высота шарового сегмента (*высотой шарового сегмента* называется отрезок диаметра, перпендикулярного к секущей плоскости). Эта формула сначала выводится для случая, когда сегмент меньше полушара ($H < R$). При этом ход доказательства такой же, как для полушара.

Шаровым сектором называется тело, которое получается из шарового сегмента и конуса следующим образом. В случае когда сегмент меньше полушара, шаровой сектор получается дополнением этого сегмента конусом с тем же основанием, которое у сегмента, и вершиной в центре шара. В случае сегмента большего полушара шаровой сектор получается из этого сегмента удалением из него конуса, у которого основанием служит основание сегмента, а вершина в центре шара.

Объём шарового сектора вычисляется по формуле

$$V = \frac{2}{3}\pi R^2 H,$$

где R – радиус шара, а H – высота соответствующего шарового сегмента. Эта формула получается с помощью формул для объёмов шарового сегмента и конуса.

4. Площадь боковой поверхности цилиндра и конуса

Впишем в цилиндр прямую призму в основании которой выпуклый n-угольник. Площадь боковой поверхности этой призмы $S_n = P_nH$, где P_n – периметр основания призмы, а H – её высота. Периметр вписанного n-угольника может сколь угодно мало отличаться от длины L окружности основания цилиндра. При этом площадь боковой поверхности призмы неограниченно приближается к LH. Поэтому величина LH принимается за площадь боковой поверхности цилиндра. Таким образом, площадь боковой поверхности цилиндра вычисляется по формуле

$$S = 2\pi RH,$$

где R – радиус цилиндра, а H – его высота.

Впишем в конус правильную n-угольную пирамиду. Площадь боковой поверхности этой пирамиды $S_n = \frac{1}{2}P_n l_n$, где P_n – периметр основания, а l_n – апофема. При неограниченном увеличении n периметр основания P_n неограниченно приближается к длине L окружности основания конуса, а апофема l_n – к длине l образующей. Таким образом, боковая поверхность пирамиды неограниченно приближается к $Ll/2$. Поэтому величина $Ll/2$ принимается за площадь боковой поверхности конуса, которая вычисляется по формуле

$$S = \pi Rl,$$

где R – радиус основания конуса, а l – длина образующей.

Аналогично для площади боковой поверхности усеченного конуса с радиусами оснований R_1, R_2 и образующей l получается формула

$$S = \pi(R_1 + R_2)l.$$

5. Площадь сферы

Опишем около сферы выпуклый многогранник с малыми гранями. Пусть S' – площадь поверхности многогранника, то есть сумма площадей его граней. Найдём приближённое значение площади поверхности многогранника, предполагая, что линейные размеры граней, то есть расстояние между любыми двумя точками любой грани, меньше ε.

Объём многогранника равен сумме объёмов пирамид, имеющих своими основаниями грани многогранника, а вершиной – центр сферы. Так как все пирамиды имеют одну и ту же высоту, равную радиусу R сферы, то объём многогранника $V = \frac{1}{3}S'R$. Объём многогранника больше объёма шара, ограниченного сферой, но меньше объёма шара с тем же центром и радиусом $R + \varepsilon$. Таким образом,

$$\frac{4}{3}\pi R^3 < \frac{1}{3}S'R < \frac{4}{3}\pi(R+\varepsilon)^3 .$$

Отсюда

$$4\pi R^2 < S' < 4\pi(R+\varepsilon)^2\left(1+\frac{\varepsilon}{R}\right).$$

Мы видим, что площадь поверхности описанного многогранника при неограниченном уменьшении размеров его граней, то есть при неограниченном уменьшении ε, стремится к $4\pi R^2$. Поэтому величина $4\pi R^2$ принимается за площадь сферы. Итак, площадь сферы радиуса R вычисляется по формуле

$$S = 4\pi R^2.$$

Аналогично определяется площадь сферической части поверхности шарового сектора, то есть площадь сферического сегмента, для неё получается формула

$$S = 2\pi RH,$$

где H – высота сегмента.

§31. Векторы и координаты в пространстве

1. Векторы в пространстве

Докажем, что в пространстве выполняются свойства параллельного переноса, сформулированные в теореме 119.

Теорема 119' (пространственная). 1) Преобразование, обратное параллельному переносу, есть параллельный перенос.
2) При параллельном переносе каждая прямая переходит либо в себя, либо в параллельную прямую.
3) Если при движении расстояние произвольной точки X от соответствующей точки X' не превосходит число d, не зависящее от взятой точки X, то это движение есть параллельный перенос.
4) Два параллельных переноса, выполненные последовательно, дают снова параллельный перенос.
Доказательство. 1) Следует из определения параллельного переноса и свойства движения.

2) Пусть при параллельном переносе прямая a переходит в отличную от неё прямую b. Некоторые точки A и B прямой a переходят в точки A' и B' прямой b. По определению параллельного переноса прямые AA' и BB' параллельны, а значит лежат в одной плоскости. Но тогда и прямые AB и $A'B'$, совпадающие с прямыми a и b, параллельны.

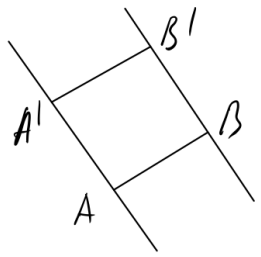
3) Прежде всего покажем, что при данном движении каждая прямая переходит либо в себя, либо в параллельную прямую. Допустим, что прямая a переходит в прямую b, отличную от a и не параллельную прямой a (¬). Случай, когда прямые a и

b лежат в одной плоскости был рассмотрен при доказательстве теоремы 119. Пусть теперь прямые *a* и *b* не лежат в одной плоскости.

Выберем на прямой *a* некоторую точку *C* и проведём через прямую *b* и точку *C* плоскость γ. Поскольку расстояние от точек прямой *a* до плоскости γ может быть сколь угодно большим (в зависимости от того как далеко от точки *C* находится точка прямой *a*), расстояние от точек прямой *a* до прямой *b* тоже может быть сколь угодно большим. Тогда выберем на прямой *a* точку *A*, которая отстоит от прямой *b* на расстоянии большем *d*. При рассматриваемом движении точка *A* перейдёт в некоторую точку *B* на прямой *b*. Так как расстояние точки *A* от прямой *b* больше *d*, то расстояние от точки *A* до точки *B* тоже больше *d*, а это противоречит условию $\otimes$. Следовательно, прямая *b* либо совпадает с *a*, либо параллельна *a*.

Пусть при данном движении некоторая точка *A* переходит в точку *A*', отличную от *A*. Возьмём точку *B*, не лежащую на прямой *AA*'. При рассматриваемом движении точка *B* перейдёт в некоторую точку *B*'. Покажем, что прямые *AA*' и *BB*' параллельны. Случай пересечения этих прямых уже был рассмотрен при доказательстве теоремы 119, покажем теперь, что прямые *AA*' и *BB*' лежат в одной плоскости.

По доказанному прямая *A*'*B*' параллельна прямой *AB*, следовательно они лежат в одной плоскости. Но тогда в этой плоскости лежат и прямые *AA*' и *BB*'. Таким образом, при рассматриваемом движении точки *A* и *B* смещаются по параллельным прямым на одно и то же расстояние. Тогда тем же самым рассуждением устанавливается, что любая точка *X*, переходящая в точку *X*', отличную от *X*, смещается по прямой, параллельной *BB*' (или *AA*'), на расстояние, равное *BB*'. В том числе точки этих самых прямых. Точек, которые переходят сами в себя, при этом движении быть не может, поскольку в этом случае расстояния от неподвижной точки до сместившихся точек не будет сохраняться. Тем самым утверждение доказано, если точка *A*' отлична от *A*. Если же для любой точки *A* точка *A*' совпадает с *A*, то движение является параллельным переносом по определению.



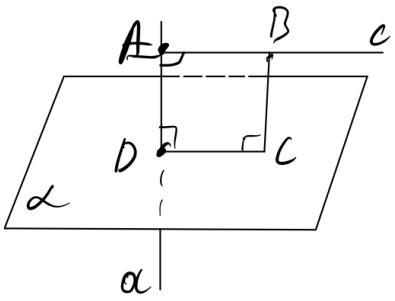
4) Доказательство совпадает с доказательством для случая параллельного переноса на плоскости. Теорема доказана.

В пространстве сохраняются определения 110 - 124 и остаются справедливыми доказательства свойств сонаправленности полупрямых и действий с векторами (теоремы 120 - 130), за исключением теоремы 128, пространственный аналог которой мы докажем ниже.

Определение 181. Три вектора в пространстве называются *компланарными*, если равные им векторы с общим началом лежат в одной плоскости.

Лемма 29. Если прямая a перпендикулярна плоскости α, то любая прямая, перпендикулярная a, параллельна плоскости α или лежит в ней.

Доказательство. Пусть прямая b перпендикулярна a. Через произвольную точку A прямой a проведём прямую c, параллельную b. Через некоторую точку B прямой c проведём прямую, параллельную a. Она пересечёт плоскость α в некоторой точке C. Обозначим D точку пересечения прямой a и плоскости α. Поскольку прямая BC параллельна a, то она перпендикулярна плоскости α и лежащей в ней прямой CD. Следовательно, $ABCD$ – прямоугольник. Тогда $c \parallel CD \Rightarrow c \parallel \alpha \Rightarrow b \parallel \alpha$. Лемма доказана.



Теорема 128' (пространственная). 1) Если вектор a отличен от нуля и b – любой коллинеарный ему вектор, то он имеет и притом единственное представление

$$b = a\lambda.$$

2) Если векторы a, b и c компланарны и векторы a и b отличны от нуля и не коллинеарны, то вектор c допускает и притом единственное представление

$$c = a\lambda + b\mu.$$

3) Пусть a, b, c – отличные от нуля не компланарные векторы. Тогда любой вектор d допускает и притом единственное представление вида

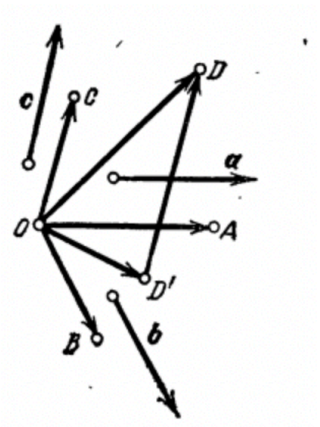
$$d = a\lambda + b\mu + c\nu.$$

Доказательство. 1) Доказано в теореме 128.

2) От некоторой точки отложим векторы a_1, b_1 и c_1, равные векторам a, b, c. Поскольку вектора a_1, b_1 и c_1 лежат в одной плоскости (опр. 181), по теореме 128 $c_1 = a_1\lambda + b_1\mu$. Заменяя в этом равенстве вектора a_1, b_1 и c_1 равными им векторами a, b и c, получаем, что $c = a\lambda + b\mu$. Доказательство единственности совпадает с доказательством единственности в теореме 128.

3) Отложим от произвольной точки O векторы OA, OB, OC, OD, равные векторам a, b, c, d соответственно, и обозначим α плоскость, в которой лежат векторы OA и OB. Если точка D лежит на прямой OC, то $OD = OC\nu$. Отсюда $d = c\nu$.

Если точка D не лежит на прямой OC, то проведём через неё прямую, параллельную прямой OC. Она пересечёт плоскость α в некоторой точке D'. Векторы OC и $D'D$ коллинеарны. Поэтому $D'D = OC\nu$. Вектор OD' лежит в



плоскости α с векторами OA и OB. Поэтому $OD' = OA\lambda + OB\mu$. Так как $OD = OD' + D'D$, то

$$OD = OA\lambda + OB\mu + OC\nu,$$

или

$$d = a\lambda + b\mu + c\nu.$$

Докажем единственность представления. Допустим, что существует другое представление

$$d = a\lambda' + b\mu' + c\nu'.$$

Вычитая одно равенство из другого, получим

$$\mathbf{0} = a(\lambda - \lambda') + b(\mu - \mu') + c(\nu - \nu').$$

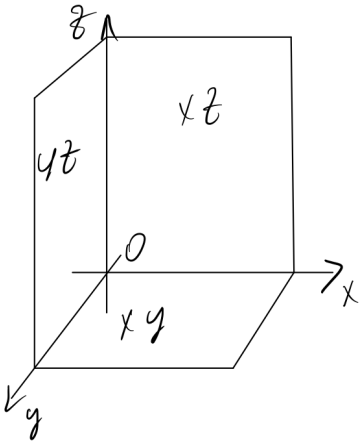
Умножим это равенство скалярно на вектор a', перпендикулярный векторам b и c. Получим $(\lambda - \lambda')(aa') = 0$. Но $aa' \neq 0$, так как векторы a, b, c не компланарны (лемма 29). Поэтому $\lambda - \lambda' = 0$, аналогично $\mu - \mu' = 0$, $\nu - \nu' = 0$. Следовательно, представления вектора d вопреки предположению совпадают. Теорема доказана.

Лемма 30. Если из трёх векторов a, b, c два коллинеарны, то вектора a, b, c – компланарны.
Доказательство. Пусть, например, векторы a и b коллинеарны. Тогда равные им векторы OA и OB, отложенные от точки O, лежат на одной прямой OA. Отложим от точки O вектор OC, равный c. Поскольку пересекающиеся прямые OA и OC, лежат в одной плоскости, векторы OA, OB и OC тоже лежат в одной плоскости. Следовательно, векторы a, b и c компланарны (опр. 181). Если же один из векторов a, b, c нулевой, то утверждение леммы очевидно. Лемма доказана.

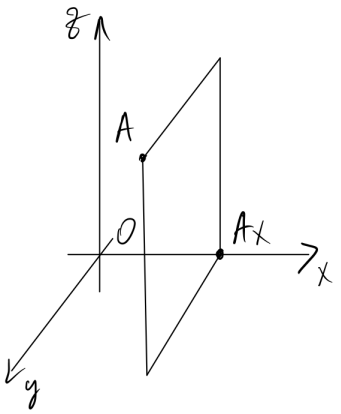
Теорема 189. Если вектор c можно представить в виде $c = a\lambda + b\mu$, где λ и μ – некоторые числа, то векторы a, b и c компланарны.
Доказательство. Если какой-то из векторов a, b, c нулевой, то два другие коллинеарны и утверждение теоремы следует из леммы 30.

Будем считать, что векторы a и b не коллинеарны. Отложим от произвольной точки O векторы OA и OB, равные векторам a и b, и обозначим α плоскость векторов OA и OB. Тогда векторы $OA' = OA\lambda$ и $OB' = OB\mu$ тоже лежат в плоскости α, как и их сумма – вектор $OC = OA' + OB' = OA\lambda + OB\mu$, равный вектору c. Поскольку векторы OA, OB и OC лежат в одной плоскости, равные им векторы a, b, c компланарны (опр. 181). Теорема доказана.

2. Координаты в пространстве



Возьмём три взаимно перпендикулярные прямые *x, y, z*, пересекающиеся в точке *O*. Проведём через каждую пару этих прямых плоскость. Плоскость, проходящая через прямые *x* и *y*, называется плоскостью *xy*. Две другие плоскости называются соответственно *xz* и *yz*. Прямые *x, y, z* называются *координатными осями* или *осями координат*, их точка пересечения *O* – *началом координат*, а плоскости *xy, yz* и *xz* – *координатными плоскостями*. Точка *O* разбивает каждую их осей координат на две полупрямые. Условимся одну их них называть положительной, отмечая её стрелкой, а другую – отрицательной.



Возьмём теперь произвольную точку *A* и проведём через неё плоскость, параллельную плоскости *yz*. Она пересечёт ось *x* в некоторой точке A_x. *Координатой x* точки *A* будем называть число, равное по абсолютной величине длине отрезка OA_x, положительное, если A_x лежит на положительной полуоси *x*, и отрицательное, если она лежит на отрицательной полуоси. Если точка A_x совпадает с точкой *O*, то полагаем $x = 0$. Аналогично определяются координаты *y* и *z* точки *A*. Координаты точки записывают в скобках рядом с буквенным обозначением точки: *A* (*x; y; z*).

3. Векторные операции в координатах

Координаты векторов в пространстве определяются аналогично координатам на плоскости.

Отложим из начала координат *O* на положительных полуосях осей *x*, *y, z* единичные векторы e_1, e_2, e_3 соответственно. Эти векторы также называют *базисными*.

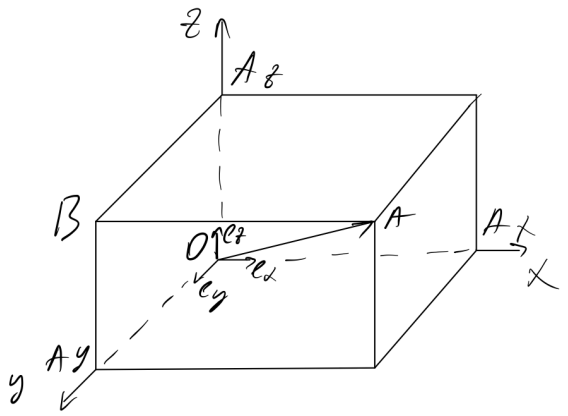
Каждый вектор *a* имеет и притом единственное представление через базисные векторы:

$$a = a_x e_1 + a_y e_2 + a_z e_3.$$

Числа a_x, a_y и a_z называются *координатами вектора a*. Координаты вектора записываются в скобках рядом с обозначением вектора: a (a_x; a_y; a_z). Координаты любого нулевого вектора равны нулю (0; 0; 0). Координаты базисных векторов: e_1 (1; 0; 0), e_2 (0; 1; 0), e_3 (0; 0; 1).

Из единственности разложения каждого вектора через базисные векторы следует, что *равные векторы имеют равные соответствующие координаты*. Обратно, *если у*

векторов соответствующие координаты равны, то и векторы равны: $a = xe_1 + ye_2 + ze_3 = b$.



Покажем, как координаты вектора связаны с координатами его концов. Сначала рассмотрим вектор OA начало которого O является началом координат. Пусть точки A_x, A_y, A_z построены так, как описано в пункте 2. Если точка A не лежит в одной из координатных плоскостей, точки A_x, A_y, A_z являются вершинами прямоугольного параллелепипеда с рёбрами OA_x, OA_y, OA_z. Тогда

$$OA = OA_x + A_xA = OA_x + OB = OA_x + OA_y + OA_z = xe_1 + ye_2 + ze_3,$$

где x, y, z – координаты точки A. Таким образом, координаты вектора OA равны координатам его конца. Для случая, когда точка A лежит в одной из координатных плоскостей, данный факт доказан в планиметрии.

Остальные свойства координат векторов выводятся аналогично планиметрическому случаю:

1) Для произвольного вектора A_1A_2, где A_1 $(x_1; y_1; z_1)$ и A_2 $(x_2; y_2; z_2)$:

$$A_1A_2 = OA_2 - OA_1 = x_2e_1 + y_2e_2 + z_2e_3 - (x_1e_1 + y_1e_2 + z_1e_3) =$$
$$= (x_2 - x_1)e_1 + (y_2 - y_1)e_2 + (z_2 - z_1)e_3.$$

Таким образом, *координаты* a_x, a_y и a_z *вектора* A_1A_2 *равны разностям координат его конца и начала:* $a_x = x_2 - x_1$, $a_y = y_2 - y_1$, $a_z = z_2 - z_1$.

2) Координатами вектора A_2A_1, противоположного A_1A_2, являются числа $x_1 - x_2$ и $y_1 - y_2$, $z_1 - z_2$, то есть $-a_x$, $-a_y$, $-a_z$.

3) Координатами суммы векторов a $(a_x; a_y; a_z)$ и b $(b_x; b_y; b_z)$ являются числа $a_x + b_x$, $a_y + b_y$, $a_z + b_z$:

$$a + b = a_xe_1 + a_ye_2 + a_ze_3 + b_xe_1 + b_ye_2 + b_ze_3 = (a_x + b_x)e_1 + (a_y + b_y)e_2 + (a_z + b_z)e_3.$$

4) Координаты вектора $-b$, противоположного b, равны $(-b_x; -b_y; -b_z)$, следовательно, координатами разности векторов $a - b$ являются числа $a_x - b_x$, $a_y - b_y$, $a_z - b_z$.

5) Координатами вектора λa являются числа λa_x, λa_y, λa_z:

$$\lambda a = \lambda(a_xe_1 + a_ye_2 + a_ze_3) = \lambda a_xe_1 + \lambda a_ye_2 + \lambda a_ze_3.$$

6) Выразим скалярное произведение векторов a (a_x; a_y; a_z) и b (b_x; b_y; b_z) через их координаты. При преобразованиях используем, что $e_1^2 = e_2^2 = e_3^2 = 1$, а $e_1e_2 = e_1e_3 = e_2e_3 = 0$:

$$ab = (a_xe_1 + a_ye_2 + a_ze_3)(b_xe_1 + b_ye_2 + b_ze_3) = a_xb_x(e_1e_1) + a_xb_y(e_1e_2) + a_xb_z(e_1e_3) + a_yb_x(e_2e_1) + a_yb_y(e_2e_2) + a_yb_z(e_2e_3) + a_zb_x(e_3e_1) + a_zb_y(e_3e_2) + a_zb_z(e_3e_3) = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z.$$

Итак,

$$ab = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z.$$

4. Расстояние между точками

Выразим расстояние между двумя точками A_1 (x_1; y_1; z_1) и A_2 (x_2; y_2; z_2) через координаты этих точек.

Расстояние между точками A_1 и A_2 равно абсолютной величине вектора

$$A_1A_2 = (x_2 - x_1)e_1 + (y_2 - y_1)e_2 + (z_2 - z_1)e_3.$$

Возведём это равенство скалярно в квадрат:

$$(A_1A_2)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2.$$

Теперь в левой части равенства стоит квадрат абсолютной величины вектора A_1A_2, равный расстоянию между точками A_1 и A_2.

Расстояние между точками (x_1; y_1; z_1) и (x_2; y_2; z_2) определяется по формуле

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2.$$

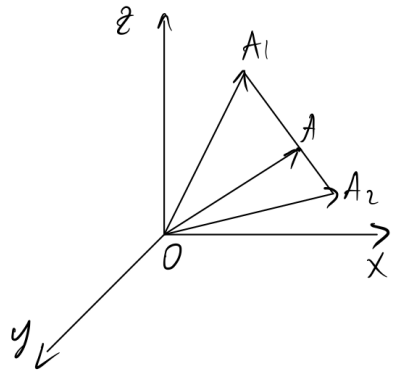
Абсолютная величина вектора a (a_x; a_y; a_z) равна $\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$.

Из формулы абсолютной величины вектора и выражения скалярного произведения векторов в координатах следует, что косинус угла α между векторами a (a_x; a_y; a_z) и b (b_x; b_y; b_z) выражается формулой

$$\cos\alpha = \frac{a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}.$$

5. Деление отрезка в данном отношении

Пусть в пространстве даны две точки A_1 (x_1; y_1; z_1) и A_2 (x_2; y_2; z_2). Найдём координаты x, y, z точки A, делящей отрезок A_1A_2 в отношении m_1:m_2.

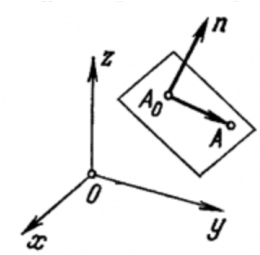


Векторы AA_1 и AA_2 противоположно направлены, а их абсолютные величины относятся как m_1:m_2. Поэтому

$$\frac{AA_1}{m_1} + \frac{AA_2}{m_2} = 0.$$

Но

$$AA_1 = (x_1 - x)e_1 + (y_1 - y)e_2 + (z_1 - z)e_3,$$



$$AA_2 = (x_2 - x)e_1 + (y_2 - y)e_2 + (z_2 - z)e_3.$$

Следовательно,

$$\frac{x_1 - x}{m_1}e_1 + \frac{y_1 - y}{m_1}e_2 + \frac{z_1 - z}{m_1}e_3 + \frac{x_2 - x}{m_2}e_1 + \frac{y_2 - y}{m_2}e_2 + \frac{z_2 - z}{m_2}e_3 = 0.$$

Поскольку по лемме 20 сумма двух неколлинеарных векторов не может быть равна нулю, из последнего равенства получаем, что

$$\frac{x_1 - x}{m_1} + \frac{x_2 - x}{m_2} = 0; \quad \frac{y_1 - y}{m_1} + \frac{y_2 - y}{m_2} = 0; \quad \frac{z_1 - z}{m_1} + \frac{z_2 - z}{m_2} = 0.$$

Решая последние уравнения относительно x, y и z, находим координаты точки A:

$$x = \frac{m_2x_1 + m_1x_2}{m_1 + m_2}, \quad y = \frac{m_2y_1 + m_1y_2}{m_1 + m_2}, \quad z = \frac{m_2z_1 + m_1z_2}{m_1 + m_2}.$$

В частности, координаты середины отрезка: $x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2}$, $z_0 = \frac{z_1 + z_2}{2}$.

6. Уравнение сферы

Пусть центр сферы находится в точке A ($a; b; c$), а радиус сферы R. Точками сферы являются те и только те точки пространства, расстояния от которых до точки A равны R. Приравнивая квадрат расстояния от точки ($x; y; z$) до точки A к радиусу, получим уравнение сферы:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2.$$

7. Уравнение плоскости

Любая плоскость в пространстве имеет уравнение вида

$$ax + by + cz + d = 0, \qquad (*)$$

где a, b, c, d – постоянные. Обратно, любое такое уравнение является уравнением некоторой плоскости.

Пусть A_0 ($x_0; y_0; z_0$) – какая-нибудь точка плоскости и n ($a; b; c$) – вектор, перпендикулярный плоскости. Пусть A ($x; y; z$) – произвольная точка плоскости. Векторы A_0A и n перпендикулярны. Поэтому их скалярное произведение равно нулю: $A_0A \cdot n = 0$. Таким образом, каждая точка плоскости удовлетворяет уравнению

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0. \qquad (**)$$

Обратно, если точка A ($x; y; z$) удовлетворяет этому уравнению, то $A_0A \cdot n = 0$. А значит, точка A лежит в плоскости. Таким образом, уравнение (**) является уравнением нашей плоскости. Его можно переписать так:

$$ax + by + cz + (-ax_0 - by_0 - cz_0) = 0.$$

Мы видим, что оно имеет вид (*). Тем самым первое утверждение доказано.

Пусть теперь имеется уравнение $ax + by + cz + d = 0$. Покажем, что оно является уравнением некоторой плоскости. Пусть x_0, y_0, z_0 – какое-нибудь решение этого

уравнения: $ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0$. С помощью этого соотношения наше уравнение можно преобразовать так:

$$ax + by + cz - ax_0 - by_0 - cz_0 = 0,$$

или

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$$

А в таком виде, как мы знаем, оно представляет собой уравнение плоскости, проходящей через точку $(x_0; y_0; z_0)$, перпендикулярно вектору n $(a; b; c)$. Второе утверждение доказано.

Заметим, что в *уравнении плоскости*

$$ax + by + cz + d = 0$$

коэффициенты a, b, c являются координатами вектора, перпендикулярного плоскости.

Прямую в пространстве можно задать как пересечение двух плоскостей. Следовательно, любая прямая может быть задана системой из двух уравнений плоскостей, проходящих через эту прямую.

8. Расположение плоскости относительно системы координат

Выясним, какие особенности существуют в расположении плоскости относительно системы координат, если её уравнение имеет тот или иной частный вид.

1. $a = 0$, $b = 0$. Вектор n (перпендикулярный плоскости) параллелен оси z. Плоскость параллельна плоскости xy, либо совпадает с плоскостью xy, если $d = 0$.
2. $b = 0$, $c = 0$. Плоскость параллельна плоскости yz, либо совпадает с ней, если $d = 0$.
3. $c = 0$, $a = 0$. Плоскость параллельная плоскости xz, либо совпадает с ней, если $d = 0$.
4. $a = 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$. Вектор n перпендикулярен оси x: $ne_1 = 0$. Плоскость параллельная оси x, либо проходит через неё, если $d = 0$.
5. $a \neq 0$, $b = 0$, $c = 0$. Плоскость параллельная оси y, либо проходит через неё, если $d = 0$.
6. $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c = 0$. Плоскость параллельная оси z, либо проходит через неё, если $d = 0$.
7. $d = 0$. Плоскость проходит через начало координат (координаты 0, 0, 0 удовлетворяют уравнению плоскости).

9. Основные задачи на прямую и плоскость

1. Найдём расстояние от точки A $(x'; y'; z')$ до плоскости $ax + by + cz + d = 0$. Опустим из точки A перпендикуляр на плоскость. Пусть A_0 $(x_0; y_0; z_0)$ – основание перпендикуляра. Так как точка A_0 лежит на плоскости, то $ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0$. Отсюда

$$ax' + by' + cz' + d = a(x' - x_0) + b(y' - y_0) + c(z' - z_0) = A_0A \cdot n = \pm |n|r,$$

где n – вектор, перпендикулярный плоскости, с координатами a, b, c, а r – расстояние от точки A до плоскости. Поскольку $|n| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$, получаем, что *расстояние от точки* A $(x'; y'; z')$ *до плоскости с уравнением* $ax + by + cz + d = 0$ *находится по формуле*

$$r = \frac{|ax' + by' + cz' + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

2. Найдём условия параллельности и перпендикулярности двух плоскостей

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0,$$
$$a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0.$$

Так как a_1, b_1, c_1 – координаты вектора n_1, перпендикулярного первой плоскости, а a_2, b_2, c_2 – координаты вектора n_2, перпендикулярного второй плоскости, то плоскости параллельны, если векторы n_1 и n_2 параллельны, то есть если их координаты пропорциональны:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}.$$

Это условие достаточно для параллельности плоскостей, если они не совпадают.

Для того, чтобы плоскости были перпендикулярны, необходимо и достаточно, чтобы указанные векторы n_1 и n_2 были перпендикулярны, что для ненулевых векторов эквивалетно условию $n_1 \cdot n_2 = 0$ или

$$a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0.$$

3. Найдём угол α между плоскостями. Этот угол равен углу между векторами n_1 и n_2, либо дополняет его до 180°. Поэтому в любом случае

$$|n_1 \cdot n_2| = |n_1||n_2| \cos \alpha.$$

Отсюда

$$\cos\alpha = \frac{|a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}.$$

4. Составим уравнение плоскости, проходящей через заданную точку $(x_0; y_0; z_0)$ и параллельную плоскости $ax + by + cz + d = 0$. Искомое уравнение:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$$

В самом деле, эта плоскость проходит через данную точку и параллельна данной плоскости.

10. Уравнения движения

Установим уравнения движения в пространстве. Пусть A $(x; y; z)$ – произвольная точка пространства и A' $(x'; y'; z')$ – соответствующая ей точка при движении. Найдём формулы, выражающие координаты x', y', z' точки A' в зависимости от координат x, y, z точки A.

Начнём с *симметрии относительно плоскости*, приняв за плоскость симметрии координатную плоскость xy. Согласно определению симметрии прямая AA'

перпендикулярна плоскости симметрии (плоскости xy) и пересекает её в середине отрезка AA'. Отсюда следует, что проходящие через точки A и A' плоскости, параллельные плоскости yz, совпадают, поскольку проходят через прямую AA' и через лежащую в плоскости xy прямую, проходящую через середину отрезка AA' и параллельную оси y. Значит, по определению координат $x' = x$. Аналогично получаем, что $y' = y$. Середина отрезка AA' принадлежит плоскости xy, следовательно, её координата z равна нулю. По формуле координаты середины отрезка имеем $\frac{z+z'}{2} = 0$, откуда $z' = -z$. Таким образом, при симметрии относительно координатной плоскости xy:

$$x' = x, \qquad y' = y, \qquad z' = -z.$$

Рассмотрим *симметрию относительно точки*. В качестве такой точки возьмём начало координат. По определению симметрии относительно точки, в данном случае относительно начала координат O, полупрямые OA и OA' являются дополнительными, а отрезки OA и OA' равны. Следовательно, векторы OA и OA' противоположны. Имеем

$$OA = xe_1 + ye_2 + ze_3, \quad OA' = x'e_1 + y'e_2 + z'e_3.$$

Так как векторы OA и OA' противоположны, то

$$x' = -x, \qquad y' = -y, \qquad z' = -z.$$

Рассмотрим *параллельный перенос в пространстве*. Пусть $O'(a; b; c)$ – точка, в которую переходит начало координат O при параллельном переносе. Тогда по определению параллельного переноса векторы OO' и AA' коллинеарны и равны по абсолютной величине. Пусть точка A не лежит на прямой OO'. В этом случае фигура $OO'A'A$ – параллелограмм (т. 119' (2)) и, следовательно, векторы OO' и AA' одинаково направлены (т. 122), а значит, равны

$$(x' - x)e_1 + (y' - y)e_2 + (z' - z)e_3 = ae_1 + be_2 + ce_3.$$

Отсюда

$$x' - x = a, \quad y' - y = b, \quad z' - z = c$$

или

$$x' = x + a, \quad y' = y + b, \quad z' = z + c.$$

Если точка A лежит на прямой OO', то возьмём точку A_1, не лежащую на этой прямой. Тогда $A_1A'_1A'A$ – параллелограмм. Отсюда – равенство векторов $A_1A'_1$, AA'. Теперь из равенства векторов OO' и $A_1A'_1$ заключаем о равенстве векторов OO', AA' и получаем те же формулы, что и в первом случае. Итак, *при параллельном переносе, который переводит начало координат в точку (a; b; c), уравнения движения задаются формулами*

$$x' = x + a, \quad y' = y + b, \quad z' = z + c.$$

Вопросы к экзамену

Планиметрия I

1) Что изучает геометрия. Принадлежность и пересечение.
2) Отношение порядка. Отрезок.
3) Полуплоскость.
4) Полупрямая.
5) Теоремы-следствия теоремы 11.
6) Координаты.
7) Угол.
8) Откладывание углов. Равенство треугольников.
9) Параллельные прямые. Основные понятия аксиоматики.

Планиметрия II

1) Вертикальные углы. Перпендикулярные прямые.
2) Второй признак равенства треугольников. Равнобедренный треугольник.
3) Медиана, биссектриса и высота. Равносторонний треугольник. Третий признак равенства треугольников.
4) Соотношение между углами треугольника. Соотношение между углами треугольника и противолежащими сторонами.
5) Неравенство треугольника.
6) Углы и стороны прямоугольного треугольника. Равенство прямоугольных треугольников.
7) Перпендикуляр и наклонная.
8) Признаки параллельности прямых.
9) Сумма углов треугольника. Параллельные прямые как равноотстоящие прямые.
10) Выпуклые четырёхугольники.
11) Параллелограмм.
12) Прямоугольник. Ромб. Квадрат.
13) Теорема Фалеса. Средняя линия треугольника. Точка пересечения медиан треугольника.
14) Трапеция.
15) Понятие движения. Свойства движения.
16) Симметрия относительно прямой. Симметрия относительно точки. Равенство фигур.
17) Параллельный перенос. Поворот.
18) Окружность и её свойства. Центральные углы.
19) Вписанные углы.
20) Вписанная и описанная окружности.
21) Первый признак подобия треугольников.
22) Второй и третий признаки подобия треугольников.
23) Пропорциональные отрезки в треугольнике.
24) Пропорциональность отрезков хорд и секущих. Пересечение прямой с окружностью.
25) Гомотетия. Подобие фигур.
26) Теорема Пифагора. Соотношения в косоугольном треугольнике.
27) Соотношения между диагоналями и сторонами параллелограмма. Существование треугольника с данными сторонами.
28) Взаимное расположение двух окружностей.
29) Инструменты построения. Основные задачи на построение.
30) Геометрическое место точек. Метод геометрических мест.

Планиметрия III

1) Определение тригонометрических функций. Формулы приведения.
2) Соотношения между сторонами и углами в прямоугольном треугольнике.
3) Теорема косинусов. Теорема синусов.
4) Ломаная. Выпуклые многоугольники.
5) Сумма углов выпуклого многоугольника.
6) Пополненный многоугольник. Выпуклая ломанная.
7) Правильные многоугольники.
8) Вписанные и описанные многоугольники.
9) Понятие площади. Площадь прямоугольника.
10) Площади параллелограмма, треугольника и трапеции.
11) Площадь многоугольной фигуры.
12) Формулы площади треугольника. Площади подобных фигур.
13) Длина окружности.
14) Свойства дуг и центральных углов.
15) Длина дуги окружности. Радианная мера угла.
16) Площадь круга и его частей.
17) Свойства параллельного переноса.
18) Направление полупрямой. Понятие вектора.
19) Сложение и вычитание векторов.
20) Умножение вектора на число.
21) Скалярное умножение векторов.
22) Прямоугольные декартовы координаты на плоскости. Векторные операции в координатах.
23) Расстояние между точками. Деление отрезка в данном отношении.
24) Уравнение окружности.
25) Уравнение прямой. Расположение прямой относительно системы координат.
26) Примеры решения задач на прямую.
27) Уравнения движения.
28) Определение тригонометрических функций для любого значения аргумента.
29) Формулы приведения.
30) Формулы сложения для тригонометрических функций.

Стереометрия I

1) Аксиомы стереометрии и их следствия.
2) Точки в пространстве.
3) Параллельные прямые в пространстве.
4) Параллельность прямой и плоскости.
5) Параллельность плоскостей.
6) Отрезки параллельных прямых между параллельными плоскостями.
7) Скрещивающиеся прямые.
8) Перпендикулярность прямых.
9) Перпендикулярность прямой и плоскости.
10) Свойства перпендикулярности прямой и плоскости.
11) Построение взаимно перпендикулярных плоскости и прямой.
12) Перпендикуляр и наклонная. Теорема о трёх перпендикулярах.
13) Расстояние между скрещивающимися прямыми.
14) Перпендикулярность плоскостей.
15) Угол между прямыми.
16) Угол между прямой и плоскостью.
17) Угол между плоскостями.
18) Определение двугранного и трёхгранного углов. Теоремы косинусов и синусов для трёхгранного угла.
19) Неравенство для плоских углов трёхгранного угла. Многогранные углы.
20) Движение и его свойства. Симметрия относительно плоскости и точки, параллельный перенос.
21) Проектирование плоскости на плоскость.

Стереометрия II

1) Геометрическое тело.
2) Призма и параллелепипед.
3) Пирамида.
4) Цилиндр.
5) Конус.
6) Шар.
7) Понятие объёма.
8) Объём прямоугольного параллелепипеда.
9) Объём наклонного параллелепипеда. Объём призмы.
10) Объём пирамиды.
11) Объёмы многогранных тел.
12) Общее определение объёма.
13) Объём цилиндра и объём конуса.
14) Объём шара.
15) Площадь боковой поверхности цилиндра и конуса. Площадь сферы.
16) Векторы в пространстве.
17) Координаты в пространстве. Векторные операции в координатах.
18) Расстояние между точками. Деление отрезка в данном отношении.
19) Уравнение сферы. Уравнение плоскости.
20) Основные задачи на прямую и плоскость.

Приложение. Основные принципы логики

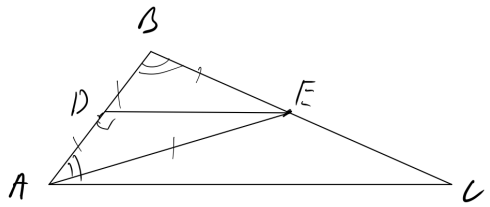
1) Правило вывода (Modus ponens): *если верно утверждение A и верно, что из A следует B, то верно B.*
2) Если доказано наличие некоторого свойства у произвольной точки фигуры, то это свойство присуще всем точкам фигуры, так как для любой из них можно повторить то же самое доказательство.
3) Закон исключённого третьего: *если ложно утверждение, противоположное данному, то данное утверждение истинно.*
4) Два утверждения P и Q эквивалентны, если из P следует Q и из Q следует P.
5) Вместо доказательства теоремы $P \Rightarrow Q$ можно доказать теорему $\neg Q \Rightarrow \neg P$.
6) Для того, чтобы опровергнуть некоторое утверждение $P \Rightarrow Q$, достаточно привести к нему один контрпример, то есть доказать, что в каком-то случае $P \Rightarrow \neg Q$.

Разное

Лемма, которая могла бы пригодиться. Пусть *BOA* – данный неразвёрнутый угол и *BC* – перпендикуляр, проведённый к прямой *OA*. Тогда точка *C* принадлежит полупрямой *OA*, если угол *BOA* острый и принадлежит полупрямой дополнительной *OA*, если угол *BOA* тупой.

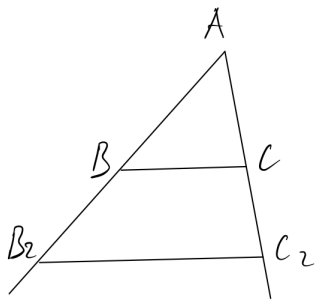
Непонадобившаяся лемма 24. Если прямая проходит через середину стороны треугольника перпендикулярно этой стороне, то она пересекает большую из двух других сторон треугольника.

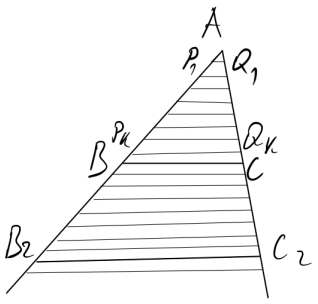
Доказательство. Пусть *ABC* – данный треугольник, у которого сторона *AC* больше стороны *BC*. Точка *D* – середина *AB*. Докажем, что прямая, проходящая через точку *D* перпендикулярно *AB* пересекает сторону *AC* треугольника. Допустим, что эта прямая проходит через точку *C*. Тогда треугольник *ABC* равнобедренный с основанием *AB*, поскольку его высота совпадает с медианой. Но это противоречит условию $AC > BC$. Допустим прямая *DE* пересекает сторону *BC*. Тогда треугольник *ABE* равнобедренный, то есть $BE = AE$. Тогда $\angle ABE = \angle BAE$. Но угол *BAE* меньше угла *BAC*, поскольку луч *AE* проходит между сторонами угла *BAC*. Следовательно, $\angle BAC > \angle ABE$, и $BC > AC$, что противоречит условию. Значит, прямая *DE* пересекает сторону *AC* (т. 7). Лемма доказана.



Доказательство теоремы 77 с помощью предельного перехода. Пусть у треугольников *ABC* и $A_1B_1C_1$ $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$. Так как сумма углов треугольника равна 180°, то из равенства углов $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, следует равенство $\angle C = \angle C_1$. Докажем пропорциональность сторон треугольников *ABC* и $A_1B_1C_1$.

Если $AB = A_1B_1$, то треугольники *ABC* и $A_1B_1C_1$ равны по второму признаку и отношения их соответствующих сторон равны 1. Следовательно $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.





Пусть $AB \neq A_1B_1$. Отложим на полупрямой *AB* отрезок AB_2, равный A_1B_1. Для определённости будем считать, что $AB < A_1B_1$, тогда точка *B* лежит между точками *A* и B_2. Проведём через точку B_2 прямую, параллельную *BC*. Она пересечёт прямую

AC в некоторой точке C_2, причём C_2 будет лежать на полупрямой AC. Действительно, так как $B_2C_2 \parallel BC$ точки B_2 и C_2 лежат в одной полуплоскости относительно BC (т. 29). Точки B_2 и A лежат в разных полуплоскостях относительно BC, значит, и точки C_2 и A лежат в разных полуплоскостях, так что отрезок AC_2 пересекается с прямой BC. Единственная точка в которой прямые AC_2 и BC пересекаются это точка C, значит, точка C лежит между точками A и C_2. Следовательно, точки C и C_2 лежат по одну сторону от A, и C_2 принадлежит полупрямой AC.

По свойству углов при параллельных прямых BC и B_2C_2 и секущей BB_2 $\angle AB_2C_2 = \angle ABC = \angle A_1B_1C_1$. Рассмотрим треугольники AB_2C_2 и $A_1B_1C_1$. У них $\angle B_2AC_2 = \angle B_1A_1C_1$ по условию теоремы, $AB_2 = A_1B_1$ и $\angle AB_2C_2 = \angle A_1B_1C_1$ по построению $\Rightarrow$ $\Delta AB_2C_2 = \Delta A_1B_1C_1 \Rightarrow AC_2 = A_1C_1$.

На полупрямой AB отложим малый отрезок AP_1 так, чтобы два отношения $\frac{AB}{AP_1}$ и $\frac{AB_2}{AP_1}$ не были целыми. Построим на AB точки $P_2, P_3 \ldots P_k \ldots$ так, чтобы $AP_k = k \cdot AP_1$.
Пусть n – целое от деления AB на AP_1, m – целое от деления AB_2 на AP_1. Так как $AB < A_1B_1$, то $n \le m$. Тогда

$$n \cdot AP_1 < AB < (n + 1) \cdot AP_1;$$
$$m \cdot AP_1 < AB_2 < (m + 1) \cdot AP_1.$$

Из этих неравенств следует, что

$$\frac{n}{m+1} < \frac{AB}{AB_2} < \frac{n+1}{m}. \qquad (1)$$

Проведём через точки $P_1, P_2, P_3 \ldots$ прямые, параллельные BC. По теореме 58 (см. замечание после этой теоремы) эти прямые пересекут полупрямую AC в точках $Q_1, Q_2, Q_3 \ldots$, причём отрезки $AQ_1, Q_1Q_2, Q_2Q_3, \ldots$ равны.

Так как $n \cdot AP_1 < AB$, то точка P_n лежит между A и B; $(n + 1) \cdot AP_1 > AB$, значит, точка B лежит между A и P_{n+1}. По лемме 6 порядок точек Q_n, C, Q_{n+1} будет аналогичным, то есть Q_n лежит между A и C, точка C лежит между A и Q_{n+1}, значит,

$$n \cdot AQ_1 < AC < (n+1) \cdot AQ_1.$$

Аналогично рассуждая приходим к

$$m \cdot AQ_1 < AC_2 < (n+1) \cdot AQ_1.$$

Тогда

$$\frac{n}{m+1} < \frac{AC}{AC_2} < \frac{n+1}{m}. \qquad (2)$$

Из неравенств (1) и (2) видно, что отношения $\frac{AB}{AB_2}$ и $\frac{AC}{AC_2}$ различаются меньше чем на

$$\frac{n+1}{m} - \frac{n}{m+1} = \frac{n+m+1}{m(m+1)} < \frac{2m+2}{m(m+1)} = \frac{2}{m}.$$

Итак, отношения $\frac{AB}{AB_2}$ и $\frac{AC}{AC_2}$ отличаются не более чем на $\frac{2}{m}$. Если взять отрезок AP_1 достаточно малым, то число m будет как угодно велико, а $\frac{2}{m}$ будет как угодно мало. Поэтому отношения $\frac{AB}{AB_2}$ и $\frac{AC}{AC_2}$ отличаются как угодно мало. А это может быть только в том случае, если они равны. Значит, $\frac{AB}{AB_2} = \frac{AC}{AC_2}$, но $AB_2 = A_1B_1$, а $AC_2 = A_1C_1 \Rightarrow \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$. Аналогично доказывается, что $\frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BC}{B_1C_1}$. Теорема доказана.

Обобщение аддитивности объёма

Лемма. Пусть A - ограниченное тело, а P - многогранное тело, содержащее всю границу A. Тогда объединение тел A и P (A ∪ P) является многогранным телом.

Доказательство. Возьмём большой прямоугольный параллелепипед B, внутри которого лежат A и P. Разобьём P на тетраэдры и проведём плоскости всех их граней. Вместе с гранями B эти плоскости разбивают B на конечное число замкнутых выпуклых многогранных ячеек с непересекающимися внутренними частями.

Внутренняя часть каждой ячейки либо целиком лежит в P, либо не пересекает P. Во втором случае она не пересекает и границу A. Такая открытая выпуклая ячейка не может содержать одновременно точку A и точку вне A: соединяющий их отрезок должен был бы встретить границу A. Следовательно, её внутренняя часть либо целиком лежит внутри A, либо целиком вне A.

Выберем замыкания (объединение с их границей) всех ячеек первого типа: тех, чьи внутренние части лежат в A или P. Они содержатся в замкнутой фигуре A ∪ P. Их объединение равно A ∪ P: эта фигура совпадает с замыканием своей внутренней части, а конечное число проведённых плоскостей не может заполнить открытый шар. Поэтому каждая её точка приближается точками выбранных ячеек.

Получено конечное объединение выпуклых многогранников; каждый разбивается на тетраэдры. Остаётся связность: A и P связны ломанными и пересекаются, поскольку граница A лежит в P и граница ограниченного непустого тела непуста. Значит, A ∪ P также связано ломанными. Лемма доказана.

Лемма. Границы конечного числа тел с существующими объёмами можно одновременно заключить в одно многогранное тело P с объёмом меньше ε.

Доказательство. Для m границ возьмём отдельные многогранные покрытия с суммарным объёмом меньше ε/2. Выберем по точке в каждом покрытии и соединим

их конечной цепью отрезков. Каждый отрезок заключим в тонкий прямоугольный параллелепипед так, чтобы сумма объёмов этих перемычек была меньше ε/2. Объединение покрытий и перемычек связано ломанными, имеет конечное тетраэдральное разбиение и объём меньше ε. Перемычки разрешено проводить вне исходного тела. Лемма доказана.

Лемма. Если $A_1, ..., A_m$ лежат в теле T, все эти тела имеют объёмы, а внутренние части A_i попарно не пересекаются, то сумма объёмов тел $A_1, ..., A_m$ не больше объёма тела T. При этом их объединение может быть несвязным и может не покрывать T.
Доказательство. Выберем многогранное тело S, содержащее T, такое, что $v(S) < V(T) + \varepsilon$. По предыдущей лемме возьмём связное P с $v(P) < \varepsilon$, содержащее все границы тел $A_1, ..., A_m$. Положим $Q_i = A_i \cup P, Q = Q_1 \cup \cdots \cup Q_m$.

Все Q_i многогранны по первой лемме, а Q - многогранное тело, поскольку все Q_i содержат P. При $i \neq j$ имеем $Q_i \cap Q_j = P$: пересечение $A_i \cap A_j$ лежит в их границах и потому уже включено в P. В общем тетраэдральном разбиении область P учитывается m раз, остальная часть Q - один раз. Поэтому

$$\sum_{i=1}^{m} v(Q_i) = v(Q) + (m-1)v(P).$$

Тело $S \cup P$ многогранно и связано: P пересекает $A_i \subset S$. Кроме того, $Q \subset S \cup P$. Используя только многогранные объёмы и определение $V(A_i)$, получаем

$$\sum_{i=1}^{m} V(A_i) \leq v(S) + mv(P) < V(T) + (m+1)\varepsilon.$$

Так как ε произвольно, требуемая оценка доказана. Объём несвязного объединения $A_1 \cup ... \cup A_m$ в рассуждении не использовался.

Теорема. Пусть тело *T* разбивается на конечное число тел $T_1, T_2, \ldots, T_n$, причём для тела *T* и тел его разбиения выполняются условия существования объёма. Тогда объём тела *T* равен сумме объемов тел $T_1, T_2, \ldots, T_n$.
Доказательство. Оценка $\sum V(T_i) \leq V(T)$ уже дана последней леммой. Для обратной оценки выберем многогранные тела $R_i \supset T_i$, для которых $v(R_i) < V(T_i) + \varepsilon/n$.

Их объединение R является многогранным телом. Действительно, оно содержит T; любая точка R_i соединяется внутри R_i ломанной с точкой T_i, а затем точки разных частей соединяются ломанной внутри $T \subset R$. Следовательно, R связано ломанными. По определению объёма и многогранной оценке объединения

$$V(T) \le v(R) \le \sum_{i=1}^{n} v(R_i) < \sum_{i=1}^{n} V(T_i) + \varepsilon.$$

Устремляя ε к нулю, получаем обратное неравенство и равенство объёмов. Это прямое доказательство для любого конечного числа частей, не требующее последовательного разрезания одной поверхностью.