

Н. Д. Ханбеков

Откуда берётся геометрия?

Книга о том как создать целый мир с помощью воображения и логики

Москва, 2023 г.

Вымышленный мир требует логики, ибо это мир порядка, а не произвола. Его физические законы могут отличаться от тех, какие существуют в мире реальном, однако эти законы должны быть понятны и логически безупречны.

Уистен Х. Оден

Оглавление

0. О чём это здесь?.....	4
1. Что и как изучает геометрия?.....	4
2. Принадлежность и пересечение.....	7
3. Отрезок.....	13
4. Пространство и плоскость.....	23
5. Полуплоскость.....	27
6. Полупрямая.....	36
7. Угол.....	43
8. Равенство треугольников.....	53
9. Параллельные прямые.....	60
10. Краткие итоги.....	63
11. Так про что была эта книга?.....	64
12. А можно было сделать всё по-другому?.....	68
Список литературы.....	71
Решения упражнений.....	72

0. О чём это здесь?

Этот текст для любознательных школьников, которые уже начали изучать геометрию и хотят хорошо разобраться в её устройстве. Возможно вы слышали, что в математике вообще, и в геометрии в частности¹, все факты выводятся из небольшого числа утверждений (аксиом). Только вот в школе эти аксиомы либо не проходят совсем, либо проходят бегло, не показывая как, собственно, они поддерживают здание всей теории. Ничего страшного в этом нет – разобраться в фундаменте можно долго, но на уроках важнее изучить основной материал предмета. Поэтому вводные параграфы в учебниках написаны сжато и по возможности упрощенно.

Однако если вам интересна математика, то рано или поздно хочется понять откуда она «возникает». Этот процесс можно сравнить с загрузкой компьютера. Когда операционная система уже запущена – всё более-менее понятно, но что происходит в тот момент, когда в «железо» только начинает поступать ток? Этот процесс сложен и интересен с точки зрения программирования, хотя и не так важен для последующей работы. «Загрузка» любой научной теории, в том числе геометрии, часто сложнее, чем сама теория. Поэтому давайте попробуем разобраться во всём подробно и обстоятельно.

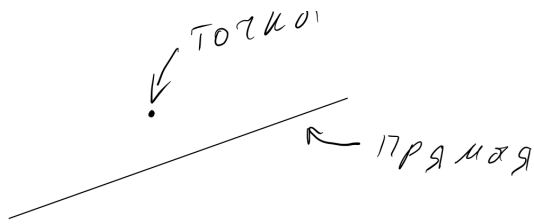
Я расскажу про «школьную» аксиоматику геометрии, предложенную академиком и автором школьного учебника [1]² А. В. Погореловым. Она хоть и попроще аксиом, которые используют серьёзные учёные-математики, но всё равно позволяет строго обосновать все геометрические факты. Легче всего будет тем читателям, которые изучают геометрию по учебнику Погорелова – он построен именно так, как мы будем описывать, хотя и с небольшими изменениями. Кое-где для большей строгости изложения мы сформулируем аксиомы иначе и объясним почему.

1. Что и как изучает геометрия?

Если в поисках ответа на этот вопрос открыть учебник геометрии, то там будет написано что-то вроде «*Геометрия – это наука о свойствах геометрических фигур*». С тем же успехом можно сказать, что «геометрия изучает то что она изучает», или «геометрия изучает непонятно что», ведь что такое «геометрическая фигура» мы точно не знаем. Это объясняется только на примерах. Вот точка, прямая, плоскость, отрезок – всё это геометрические фигуры. Ну а что такое точка и прямая? На этот вопрос авторы учебников обычно отвечают с помощью рисунка.

¹ Не все школьники сразу догадываются, что геометрия это часть математики.

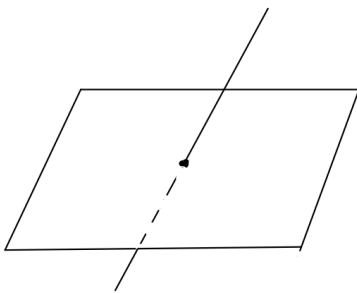
² Цифры в квадратных скобках традиционно означают номер книги в списке литературы, который можно найти на странице 71.



Вот тут нарисована точка, а там прямая. Так что же получается, геометрия это наука о рисунках? Но тут же уточняется, что вообще-то прямая бесконечно продолжается в обе стороны, а точка не имеет размеров. На рисунке, конечно, точка изображена маленьким кружком, а

прямая своим кусочком, потому что нарисовать бесконечную прямую мы не можем. Получается, что геометрия это наука о рисунках, которые мы не можем сделать. Всё стало совсем плохо.

Прямая пересекает плоскость



Может быть геометрия, как физика, изучает какие-то объекты реального мира? В нашем мире есть нечто похожее, например, натянутая верёвка напоминает прямую, а стол плоскость. Но в отличие от верёвки и стола, прямая и плоскость безграничны, не имеют толщины, да ещё и могут проходить одна через другую, так что это совсем не тоже самое. Несколько более точная аналогия – лучи света и оконное стекло. Стекло напоминает плоскость, а луч –

прямую. Но опять же стёкла имеют границы и толщину, а плоскости простираются во все стороны. К тому же при прохождении луча через стекло свет по законам физики преломляется, а вот прямая, пересекая плоскость, остаётся такой же прямой.

Тогда может быть прямая, точка и плоскость это просто воображаемые образы, которые мы из головы переносим на бумагу? Хотя про это и не написано в учебнике, но, похоже, что дело обстоит именно так. Геометрия – это воображаемый (философ сказал бы «абстрактный») мир, который только немного похож на реальный. Его придумали люди, как и другие воображаемые миры в фантастической литературе, например, мир «Хроник Нарнии» или «Хоббита». В мире геометрии тоже живут свои герои, они взаимодействуют друг с другом, приобретают новые для себя роли и образы, и даже складываются в более сложных существ. Все эти герои геометрии живут в нашем воображении, а чертежи – это что-то вроде иллюстраций к рассказу.

Но у мира геометрии есть одно важное отличие от других литературных миров – он должен быть логичен. Другими словами, мы можем придумать нового героя истории, но его существование не должно противоречить всему что уже написано, а взаимодействовать с остальными персонажами наш герой будет по заранее установленным правилам и только по ним. Применить эти правила и узнать

результат (например, выяснив какую-нибудь особенность персонажа) можно только при помощи рассуждений на основании уже установленных фактов.

Приведём пример (не из мира геометрии, а совсем из другой вселенной) того, что называется *логическим рассуждением*, позволяющим ответить на вопрос о свойствах персонажа изучаемого мира.

Известно, что все проёмы в земле на опушке леса ведут в норы карбов. Никто не может зайти в нору к карбам, кроме других карбов. На опушке из одного из проёмов в земле выглядывает Амтамп. Является ли Амтамп карбом?

Логическое рассуждение, позволяющее ответить на этот вопрос, выглядит так. Амтамп выглядывает из проёма на опушке леса, а там все проёмы ведут в норы карбов. Следовательно, Амтамп выглядывает из норы карбов. Никто, кроме карбов, зайти к ним в нору не может. Значит, все кто находится в норе это карбы. Следовательно, Амтамп – карб.

Заметим, что для правильного логического рассуждения нам совершенно не требуется знать ни кто такие карбы, ни кто такой Амтамп, ни даже что такое «проём» и «нора» (хотя эти слова вроде бы знакомы). Важно только правильное рассуждение на основе известных фактов, которые сообщаются в первом абзаце примера. Причём, если в обычной фантастической литературе, герои могут нарушать установленные правила (например, Амтамп мог бы оказаться сморфом, незаконно проникшим в нору карбов), то в мире, построенном с помощью логических рассуждений, такое невозможно – здесь все установленные законы выполняются неукоснительно.

Итак, геометрия изучает выдуманный мир, живущий по правилам логики. А вот героев мира геометрии в учебниках и называют «геометрическими фигурами». И хотя на рисунке часто видно как идут дела у наших персонажей, каждый факт в геометрии всё равно требуется обосновать. Таковы правила игры с воображаемыми объектами – то, что видим на картинке, используем только как подсказку, а все наши догадки проверяем с помощью *логики* (точных рассуждений).

Утверждение о свойствах тех или иных фигур называется *теоремой*, а рассуждение, с помощью которого мы устанавливаем правильность теоремы, называется *доказательством*. В нашем примере теоремой является утверждение «Амтамп является карбом», а приведённое рассуждение было доказательством этого факта.

Утверждать и доказывать очень любили древние греки. Именно в Греции когда-то зародилась философия – система знаний о мире, основанная на рассуждениях. Философы выдвигали разные концепции устройства мира и любили спорить друг с другом. Довольно быстро они поняли, что для того, чтобы победить в споре, то есть доказать правильность своих взглядов, надо сначала договориться о том, в чём собеседники согласны друг с другом. Только на основе этих не оспариваемых

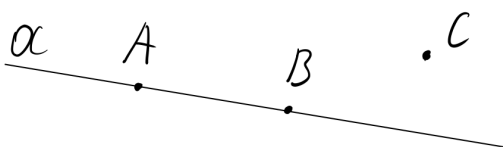
истин можно построить доказательство чего-то нового. Если же собеседники не согласны абсолютно во всём, то и доказать что-либо они друг другу не могут, ведь каждое утверждение одного спорщика будет тут же отвергаться вторым.

Помимо философии древние греки создали и математику, применив в ней те же принципы. Основные геометрические понятия и свойства фигур задаются утверждениями, которые называются *аксиомами*. Эти утверждения не доказываются, а являются отправными фактами для дальнейших рассуждений. Именно из аксиом мы узнаём о существовании таких геометрических фигур как *точка*, *прямая* и *плоскость*, а также об отношении *принадлежности* между ними. Все остальные фигуры конструируются из основных, поэтому вводятся в геометрию с помощью определений. *Определение* – это объяснение смысла нового понятия (фигуры или отношения между фигурами), через уже известные фигуры и их отношения.

2. Принадлежность и пересечение

Итак, после затянувшегося рассказа о том, что же такое геометрия, пора приступить к делу. То есть начать создавать наш воображаемый мир на основе аксиом.

Предварительные замечания. Сначала договоримся об обозначениях (то есть именах!) наших будущих героев. Точки принято обозначать прописными латинскими буквами A, B, C, D, \dots . Прямые обозначаются строчными латинскими буквами a, b, c, d, \dots . Теперь легко понять где на рисунке прямая, а где точка.



Ещё заранее условимся считать известными *натуральные числа* $(1, 2, 3, 4, \dots)$, которыми выражается количество объектов. Поэтому мы можем говорить, что некоторых фигур (например, точек) у нас одна, две, три и так далее, а если их количество не выражается натуральным числом, то будет говорить, что их *сколь угодно много* или *неограниченное количество*.

Первые аксиомы.

Аксиома I. Каждой прямой принадлежат по крайней мере две точки. Существуют три точки, не лежащие на одной прямой.

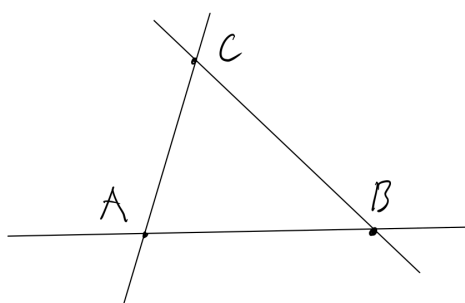
Из первой аксиомы мы узнаём, что в мире геометрии существуют три точки, не лежащие на одной прямой. Существуют ли прямые в первой аксиоме вообще-то не сказано, зато сказано, что если прямая существует, то ей должны принадлежать как минимум две точки. Аксиома не объясняет что такое «принадлежать» (и его синоним «лежать»), но ясно, что это некоторое *отношение* точек с прямыми – точка может принадлежать прямой или не принадлежать. Как ни странно, точное значение этих слов (как и знание того, что такое точка и прямая «на самом деле») нам нигде не понадобится. На рисунке же всё просто – мы рисуем точку либо на прямой, либо нет.

Небольшое лингвистическое замечание. Если точка A принадлежит прямой a , можно также сказать, что прямая a проходит через точку A . Здесь мы не определили ничего нового, а только ввели синоним для удобства речи. Теперь сформулируем вторую аксиому.

Аксиома II. Каковы бы ни были две точки, существует и притом только одна прямая, проходящая через эти точки.

Из второй аксиомы выясняется, что если есть две точки, то существует и прямая, причём единственная, которая через них проходит. Поэтому теперь прямую можно обозначать двумя точками, лежащими на ней. Например, прямая AB . Это однозначно указывает на конкретную прямую – двух прямых AB существовать по аксиоме не может.

Итак, что мы знаем о мире геометрии на данный момент? В нём есть три точки, например A , B и C , через каждые две из которых проходит прямая. Следовательно, прямых у нас пока тоже всего три – AB , BC и AC . Вот и вся геометрия.



Заметим, что в школьном учебнике [1] первая аксиома объединяет наши две, и сформулирована иначе: «Какова бы ни была прямая, существуют точки, принадлежащие этой прямой, и точки, не принадлежащие ей. Через любые две точки можно провести прямую и притом только одну». Здесь сказано почти тоже самое, только в более простом для понимания учеников виде. Если существуют точки принадлежащие прямой, то их по крайней мере две (как и у нас), а раз существуют точки не принадлежащие этой прямой, то значит есть хотя бы одна

(тоже как и у нас). То что на самом деле на прямой лежит бесчисленное количество точек можно доказать и мы сделаем это после того как введём ещё несколько аксиом.

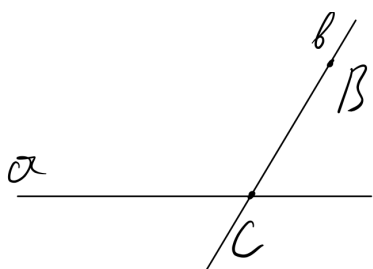
Пересечение. Всего две первые аксиомы уже позволяют сделать небольшое открытие в изучаемом нами мире. Можно предположить, что не только точки и прямые имеют отношения друг с другом (принадлежат или проходят через), но и две прямые тоже могут взаимодействовать. Сформулируем определение.

Определение. Прямые a и b пересекаются в точке C , если точка C принадлежит и прямой a , и прямой b . Точка C называется *точкой пересечения* прямых a и b .

Кстати, когда мы в каком-нибудь утверждении (определении, теореме или аксиоме) используем обозначения «точка C , прямая a , прямая b » и т.п. это, конечно, не значит, что утверждение верно только для каких-то конкретных точек и прямых. Так делают для упрощения речи. Например, данное определение можно было бы без обозначений сформулировать так: «Две прямые пересекаются в некоторой точке, если эта точка принадлежит и одной прямой, и другой. Эта некоторая точка называется *точкой пересечения* прямых» – согласитесь получилось громоздко и не очень понятно.

Выше я не случайно написал, что мы можем лишь предположить существование такого отношения (пересечения) между прямыми. Изучение геометрии похоже на диалог со скептиком (вспомним древних философов!), и тут скептик может сказать: «А где гарантии, что прямые могут пересекаться друг с другом? В аксиомах об этом ничего не сказано, а пользоваться чертежами можно только как иллюстрацией, а не подтверждением фактов!». Верное замечание. Вообще-то если мы сформулировали определение чего-то нового, то необходимо доказать, что оно действительно может существовать в нашем мире. К счастью, это несложно сделать, а заодно показать на примере как работают аксиомы вместе с искусством рассуждать, то есть логикой. Докажем первую теорему, из которой следует существование пересекающихся прямых.

Теорема 1. Через каждую точку данной прямой можно провести прямую, пересекающую данную.



Доказательство. Пусть a – данная прямая, отметим на ней произвольную точку C . По аксиоме I существует точка B , не лежащая на прямой a . Проведём через точки B и C прямую b (аксиома II). Прямая b проходит через точку B , не лежащую на прямой a , значит, прямая b отличается от a , но имеет с ней общую точку C . Это и означает, что прямые a и b пересекаются в

точке C (по определению). Теорема доказана.

Мы будем выделять зелёным цветом утверждения, на которые ссылаемся во время доказательства. Заметим, что слова «отметим» и «проведём» в нашем тексте это традиционные для геометрии вольности речи. Смысл их не в том, что мы работает с чертежом, а в том, что соответствующие фигуры (например, отмечаемая точка или проводимая прямая) существуют, мы вводим их в рассмотрение и даём имена (обозначения).

Логический разбор. Доказательство, которое мы привели выше, называется *конструктивным*. В нём мы «сконструировали» объект, существование которого хотим доказать. На примере приведённого доказательства мы можем обсудить что же такое эта самая «логика» (методика точных рассуждений) о которой много говорилось в предыдущем пункте как об инструменте исследования мира геометрии.

Пусть у нас есть некоторое утверждение P (да, утверждениям тоже можно давать имена!). Мы хотим доказать, что если P истинно, то истинно и некоторое новое утверждение Q . Обычное доказательство строится по схеме: из утверждения P следует истинность утверждения A , из утверждения A следует истинность утверждения B , из утверждения B следует Q , которое и требуется доказать. При этом для обоснования каждого логического перехода от утверждения A к утверждению B используется какое-то уже установленное утверждение связывающее A и B (это может быть аксиома, или ранее доказанная теорема, или определение). Такие утверждения-связки мы в доказательстве выделяли зелёным цветом. Например, из существования точек K и M , и **аксиомы II** следует существование прямой KM . В логике это называется принцип *Modus ponens* (правило вывода). Если верно утверждение A и что из A следует B ($A \rightarrow B$), то верно B . В нашем примере утверждение A – «существуют точки K и M », утверждение $A \rightarrow B$ это аксиома II, а утверждение B – «существует прямая KM ».

Утверждение P , с которого мы начинаем рассуждение, называется *условием теоремы*, а итоговое утверждение Q – *заключением*.

Развернём приведённое доказательство в такую цепочку выводов. Сначала надо сформулировать условие теоремы так, чтобы его было легко использовать. В данном случае утверждение P может звучать так: «Пусть a – данная прямая и C произвольная точка на ней». То, что это условие корректно следует из существования прямых, которое мы обсуждали ранее, и существования точек на прямой по аксиоме I. Заключение Q в нашей теореме – «через каждую точку данной прямой можно провести прямую, пересекающую данную». Напишем дальнейшие рассуждения в виде цепочки, где знак \Rightarrow означает *следствие*, а знак **I**, означает что мы используем два утверждения совместно.

Пусть a – данная прямая и C произвольная точка на ней **I** аксиома I \Rightarrow существует точка B , не лежащая на прямой a **I** аксиома II \Rightarrow существует прямая b , проходящая через точки B и C **I** определение пересекающихся прямых $\Rightarrow b$ – прямая, пересекающая прямую a в точке $C \Rightarrow$ через каждую точку данной прямой можно провести прямую, пересекающую данную.

Математики обычно не записывают доказательства в виде такой цепочки. Иначе математические тексты получались бы ужасно длинными и скучными. Как правило формулировка теоремы и доказательство записываются в более свободном стиле (как было и у нас изначально), но при этом на каждом этапе рассуждений мы должны точно понимать какую известную аксиому, теорему или определение мы используем, чтобы получить требуемый вывод.

Обсудим последний логический переход в нашей цепочке. Сначала мы доказали, что если взять произвольную точку на данной прямой a , то существует прямая b , пересекающая a в этой точке. Затем мы сделали вывод, что в таком случае через любую точку данной прямой можно провести другую прямую, пересекающую данную. Здесь мы используем следующую идею – *если что-то верно для произвольной точки прямой, то это верно и для любой другой точки прямой, ведь для неё можно повторить все те же самые рассуждения*. Это утверждение не является аксиомой геометрии, а является принципом логики, который часто используется когда нам нужно доказать что-то для всех объектов, обладающих общим свойством. Это могут быть точки на прямой или какие-то другие фигуры чем-то похожие.

Вернёмся к геометрии. Итак, мы установили, что в изучаемом нами мире существуют пересекающиеся прямые, то есть такие у которых есть общая точка. Но сколько именно таких общих точек могут иметь две прямые? Могут ли две прямые иметь, например, две или более точек пересечения? Судя по рисункам – такое невозможно. Но мы должны доказать этот факт логически с помощью аксиом. В доказательстве встретятся два новых символа, смысл которых я объясню ниже.

Теорема 2. Две прямые могут пересекаться только в одной точке.

Доказательство. Допустим, что две прямые пересекаются в двух или более точках (\neg). Тогда через эти две точки (или какие-нибудь две точки из всех точек пересечения) проходят две различные прямые (по определению пересекающихся прямых), но это противоречит аксиоме II \otimes . Значит, две прямые не могут

пересекаться в двух и более точках. Следовательно, две прямые могут пересекаться только в одной точке. Теорема доказана.

Здесь мы встретились с другим видом доказательства. Разберём его подробнее. Сначала мы сформулировали утверждение, противоположное условию теоремы: «две прямые пересекаются в двух или более точках». Такое утверждение ещё называется «отрицанием» и обозначается тем самым новым символом \neg . Если это утверждение верно, то по определению пересекающихся прямых, каждая из них проходит через две точки пересечения. Но по аксиоме II через две точки может проходить только одна прямая. Значит, мы пришли к противоречию с аксиомой. Противоречие в доказательстве мы обозначили символом \otimes . Следовательно, две прямые не могут пересекаться в двух (а значит и более чем в двух) точках.

Такое рассуждение называется доказательством *от противного*, или как говорили древние – сведением к абсурду. Смысл его вот в чём. Допустим, надо доказать, что при выполнении условия P (например, что две прямые пересекаются) верно заключение Q (точка пересечения только одна). Предположим, что Q ложно, а истинно противоположное (противное) утверждение $\neg Q$ (читается «не Q ») и с помощью цепочки рассуждений придём к противоречию с какой-либо аксиомой или уже доказанной теоремой, или самим условием P . Из этого делаем вывод, что раз Q не может быть ложным, значит оно обязано быть истинным. Это ещё один принцип логики (вспомните какие два мы уже обсуждали до этого), который называется «принцип исключённого третьего» – *утверждение может быть либо истинным, либо ложным, а третьего варианта нет.*

Напишем логическую цепочку.

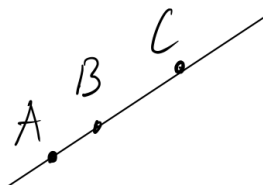
Две прямые пересекаются в двух или более точках ($\neg Q$) **И** определение пересекающихся прямых \Rightarrow через две точки проходят две различные прямые **И** Аксиома II \Rightarrow противоречие $\otimes \Rightarrow$ точка пересечения может быть только одна (Q).

Принцип исключённого третьего может оставлять чувство неудовлетворения поскольку он интуитивно неочевиден. Наш мир полон неясностей. Между утверждениями «идёт дождь» и «не идёт дождь» есть ещё «там слегка капает». Однако в классической математике неясностей нет и условный «дождь» либо идёт, либо нет, без каких-либо иных вариантов. Можно построить математику иначе, отказавшись от принципа исключённого третьего (такую математику называют интуиционистской), и даже создать другую логику, где утверждение может быть не только истинным или ложным, но это уже совсем другая история.

3. Отрезок

Чтобы разобраться с расположением точек на прямой понадобится следующая аксиома.

Аксиома III. Из трёх точек на прямой одна и только одна лежит между двумя другими.



Аксиома III не противоречит аксиоме I. По первой аксиоме на прямой лежат «по крайней мере» две точки, а значит, в каком-то случае может быть и три. Так вот, если на прямой лежат какие-нибудь три точки, то для них выполняется аксиома III.

Для удобства речи введём ещё несколько выражений с тем же самым значением, что и «лежит между». Если точка B *лежит между* точками A и C , можно также сказать, что точки A и C *лежат по разные стороны* от точки B или, что точка B *разделяет* точки A и C .

Если точка B разделяет A и C , то точка C уже не разделяет A и B (по аксиоме III только одна точка лежит между двумя другими). Поэтому можно дать ещё одно определение.

Определение. Точки A и B *лежат по одну сторону* от точки C , если они лежат на одной прямой с C , и не разделяются точкой C .

Сформулированная аксиома позволяет допустить существование новой геометрической фигуры – отрезка.

Определение. Пусть на прямой a лежат точки A и B . *Отрезком AB* называется часть прямой a , которая состоит из всех точек этой прямой, лежащих между точками A и B . Точки A и B называются *концами отрезка AB* .

Сразу заметим, что отрезок AB и отрезок BA – это один и тот же отрезок. Если какая-нибудь точка X лежит между точками A и B , то точно так же можно сказать, что она лежит между точками B и A . Так что если по ходу рассказа, мы где-нибудь случайно поменяем местами концы какого-нибудь отрезка, то не надо ловить нас за руку³.

³ Существуют и отрезки, которым не всё равно в каком порядке вы называете их концы. Эти отрезки называются *векторами* и у них появляется много своих специфических свойств. Узнать о них можно из обычного школьного учебника геометрии.

Ясно, что отрезок существует, если на прямой лежат какие-нибудь три точки, например, A , B и C . Если точка C лежит между точками A и B , то существует отрезок AB , которому принадлежит по крайней мере одна точка C . Кстати, если точка C принадлежит отрезку AB , то говорят также, что отрезок AB *содержит* точку C . Заметим, что концы отрезка, при данном определении, не являются точками отрезка. В некоторых учебниках геометрии концы отрезка принадлежат отрезку.

Однако мы пока не установили, что есть хоть одна прямая на которой лежат три точки. Поэтому в данный момент существование отрезка оказывается не выясненным. Эту проблему решает следующая аксиома, которая также открывает нам путь к использованию алгебры в геометрии.

Аксиома IV. Каковы бы ни были две точки A и B , существует отрезок AB . Каждому отрезку принадлежит положительное действительное число, называемое *длиной* отрезка. Если точка C лежит на отрезке AB , то длина отрезка AB равна сумме длин отрезков AC и BC .

Итак, из аксиомы мы узнали, что любые две точки задают отрезок, так что отрезки точно существуют, ведь по аксиоме I в мире геометрии существуют как минимум три точки. Из существования отрезка AB следует также существование точек (или хотя бы одной точки) между A и B , ведь отрезок по определению состоит из точек, лежащих между A и B . Следовательно, на прямой не существует «соседних» точек, то есть таких между которыми нет ни одной другой точки. Но тогда *на любом отрезке лежит бесчисленное количество точек*. Ведь раз существует отрезок AB , то ему принадлежит хотя бы одна точка C , а значит, существуют и отрезки AC и BC , которым тоже принадлежат свои точки, например D и E , так что появляются отрезки AD , DC , CE , EB со своими точками и так далее.

Далее в аксиоме IV вводится новое отношение – отрезков и чисел. Мы уже встречались с отношениями между различными героями мира геометрии, например, точек и прямых, которые могут «принадлежать» или «проходить через». В данном случае мы имеем дело с отношением между объектами мира геометрии (отрезками) и объектами мира алгебры (а точнее всей математики) – числами. Каждый отрезок имеет определённую длину, являющуюся числом. Следовательно, на неё распространяются все правила действий с числами, которые, кстати, сами определяются с помощью своей системы аксиом и считаются известными.

Каким образом отрезку поставлена в соответствие его длина в аксиоме не сказано, приведено только правило: если C – точка отрезка AB , то длина отрезка AB должна равняться сумме длин AC и BC , то есть $AB = AC + BC$ (длину будем обозначать так же как и сам отрезок – двумя буквами, к путанице это не приведёт).

Законен вопрос: можно ли каким-то образом выяснить, чему равна длина произвольного отрезка AB ? То есть можно ли в мире геометрии придумать процедуру измерения, проведя которую можно сказать чему равен данный отрезок? Ответ на этот вопрос положительный и через некоторое время (после введения ещё одной аксиомы) мы к нему вернёмся.

Впрочем, в обычных геометрических задачах умение измерять произвольные отрезки не требуется. Как правило в условии задачи приводятся уже известные отрезки, а неизвестные требуется выразить через них. Для примера, а ещё чтобы освоиться с понятием длины, сделаем несколько упражнений. Решения к ним приведены в конце книги.

Упражнение 1. Точки A , B и C лежат на одной прямой. Какая из этих точек лежит между двумя другими, если известны длины отрезков: $AB = 4,6$; $AC = 8,4$; $BC = 3,8$?

Упражнение 2. Могут ли точки A , B и C лежать на одной прямой, если $AB = 5$, $BC = 7$, $AC = 6$?

Упражнение 3. Точки A , B и C лежат на одной прямой. Длина отрезка AB равна $3,8$, длина AC равна $2,4$. Найдите длину отрезка BC .

Научимся сравнивать отрезки с помощью их длин.

Определение. Отрезки, не обязательно различные, называются *равными*, если равны их длины. Из двух неравных отрезков *больше* тот у которого больше длина, *меньше* тот у которого меньше длина.

Напомню, что мы можем говорить о большей и меньшей длине потому что длина это число, а для чисел отношения больше, меньше и равно считаются известными.

Обычно когда мы говорим «точки», «отрезки», «прямые» мы имеем ввиду, что это, например, две разные точки, два разных отрезка и т.д. Но в определении равенства отрезков сделано явное исключение, и сказано, что отрезки не обязательно различны. Это нужно для того, чтобы факт равенства любого отрезка самому себе не вызывал удивления.

Полупрямая. Отрезок ограничен с двух сторон. С помощью аксиомы III можно рассматривать и часть прямой, ограниченную только с одной стороны.

Определение. Пусть на прямой a лежат точки A и B . *Полупрямой* или *лучом* AB называется часть прямой, которая состоит из всех точек прямой, лежащих вместе с точкой B по одну сторону от точки A . Точка A называется *начальной точкой* полупрямой.

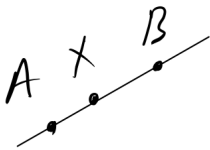


В отличие от отрезка, поменять местами буквы в обозначении полупрямой нельзя. AB и BA – это две разные полупрямые. У одной начальная точка A , а у другой B . Иногда полупрямая, как и прямая, может обозначаться строчной латинской буквой.

Так же как и с отрезком, начальная точка полупрямой не принадлежит полупрямой. Зато ей всегда принадлежит упоминаемая в определении точка B . Так что с вопросом о существовании полупрямой всё обстоит однозначно. По аксиоме I на любой прямой существуют по крайней мере две точки A и B . Значит, существует и полупрямая AB , которой принадлежит точка B .

Докажем теорему, связывающую отрезок и полупрямую.

Теорема 3. Отрезок AB является частью полупрямой AB , то есть каждая точка отрезка AB является точкой полупрямой AB .



Доказательство. По определению отрезок AB состоит из точек. Пусть X – некоторая точка на отрезке AB . По определению отрезка точка X лежит между точками A и B . Следовательно, точка A не разделяет точки X и B (по аксиоме III только одна точка из трёх лежит между двумя другими и в данном случае это точка X), а это и означает, что X и B лежат по одну сторону от точки A (определение «лежат по одну сторону»). Следовательно, по определению полупрямой точка X принадлежит полупрямой AB . Теорема доказана.

Логический разбор. В этом доказательстве мы снова используем принцип, который был сформулирован после теоремы 1: если что-то верно для произвольной точки отрезка AB , то это верно и для любой точки отрезка, ведь для неё можно повторить все те же самые рассуждения. Раз некоторая точка X отрезка принадлежит полупрямой, то любая точка отрезка тоже является точкой полупрямой.

Сделаем небольшое упражнение. Не подглядывая в дальнейший текст попробуйте самостоятельно записать доказательство теоремы 3 в виде цепочки логических выводов (то есть «из утверждения A и определения \Rightarrow утверждение B »), а затем сравните со схемой ниже. Начните с утверждения « X – произвольная точка отрезка AB », которое истинно из-за самого существования отрезка, данного по условию теоремы.

Схема, в которую нельзя подглядывать, пока не напишите свою собственную:

X – произвольная точка отрезка AB **И** определение отрезка $\Rightarrow X$ лежит между точками A и B **И** Аксиома III $\Rightarrow A$ не лежит между X и B **И** определение «лежат по одну сторону» $\Rightarrow X$ и B лежат по одну сторону от A **И** определение полупрямой $\Rightarrow X$ принадлежит полупрямой $AB \Rightarrow$ каждая точка отрезка AB является точкой полупрямой AB .

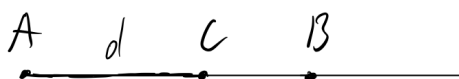
Выше мы уже обсуждали, что обычно математические теоремы строятся по схеме: «Если утверждение P истинно, то утверждение Q тоже истинно», или короче $P \Rightarrow Q$ (читается «из P следует Q »). Утверждение P это условие теоремы, а утверждение Q – заключение.

Теорема 3 сформулирована коротко и на первый взгляд выделить её условие P не так просто. Фактически оно заключается в следующем: «Точка A – начальная точка полупрямой AB и один из концов отрезка AB ». Тогда заключение Q будет таким: «Каждая точка отрезка AB является точкой полупрямой AB ». Однако логический анализ формулировки теоремы можно провести иначе. Удобнее для доказательства сформулировать условие так « X – произвольная точка отрезка AB », а заключение « X – точка полупрямой AB », а потом построить цепочку $P \Rightarrow Q$ – «Если X – точка отрезка AB , то она является точкой полупрямой AB », которую мы и доказали. Фактически это и означает истинность теоремы в том виде как она была сформулирована изначально.

Когда у нас есть математическая *гипотеза*, то есть утверждение правильности которого мы хотим проверить, то удачная формулировка условия и заключения очень важны для простоты дальнейшего доказательства. При этом, конечно, надо следить за тем, чтобы условие было корректно, то есть само по себе не противоречило аксиомам и доказанным фактам. Если условие ложно, то все дальнейшие рассуждения не имеют значения. Так что нельзя доказать теорему «если прямые a и b пересекаются в точках A , B и C , то отрезок AB равен сумме отрезков AC и BC ». Условие этой теоремы не может быть истинным.

Снова геометрия. Наконец, введём следующую аксиому, связывающую отрезки и полупрямые.

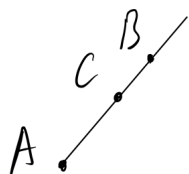
Аксиома V. Каково бы ни было положительное число d , на данной полупрямой из её начальной точки можно отложить и притом только один отрезок длины d .



Слово «отложить» в этой аксиоме это снова традиционный геометрический жаргон. Речь о том, что на полупрямой AB всегда существует отрезок AC заданной длины d , один из концов которого совпадает с начальной точкой полупрямой, а другой лежит на полупрямой. Также из аксиом V и IV следует, что на любой полупрямой можно отложить отрезок, равный данному.

Чтобы упорядочить точки на полупрямой нам нужна теорема, которая свяжет длины отложенных отрезков и расположение их концов.

Теорема 4. Если на полупрямой AB из её начальной точки A отложить отрезок AC , меньший отрезка AB , то точка C будет лежать между точками A и B . Если отложить отрезок AC , больший AB , то точка B будет лежать между A и C .



Доказательство. Рассмотрим случай, когда отрезок AC меньше AB . Точка A не может лежать между точками B и C , потому что A начальная точка полупрямой AB (определение полупрямой и понятия «лежат по одну сторону»). Если бы точка B лежала между A и C (\neg), то по аксиоме IV $AB + CB = AC$, а значит, $AC > AB$ (по свойству положительных чисел), но по условию теоремы

$AC < AB$ \otimes . Значит, точка B не лежит между A и C . Но одна из трёх точек на прямой должна лежать между двумя другими (аксиома III), значит, точка C лежит между A и B .

Случай, когда отрезок AC больше AB рассматривается аналогично. Предлагаю доказать его в качестве упражнения 4. Теорема доказана.

Логический разбор. Надеюсь вы помните, как называется тип доказательства, когда мы строим отрицание (\neg), чтобы потом прийти к противоречию (\otimes). Мы уже встречались с ним в теореме 2. Это доказательство от противного. Правда в данном случае оно является только частью доказательства теоремы. Ведь начали мы не с отрицания, а с констатации факта, что точка A не может разделять точки B и C , потому что по определению полупрямой AB точки B и C лежат по одну сторону от A , а это как раз и означает, что она не лежит между ними. Дальше в теореме допускается утверждение, противоречащее тому, что мы хотим доказать – что точка B лежит между A и C . Тогда для длин отрезков должно выполняться равенство $AB + CB = AC$, но поскольку длины это положительные числа, получается что сумма AB и ещё какого-то числа CB должна быть больше самого AB , значит $AC > AB$, что противоречит условию. Следовательно, наше допущение было неверно – точка B не лежит между A и C . Остаётся только вспомнить, что хоть какая-то точка из трёх должна лежать между двумя другими и сделать вывод, что раз это не A и не B , значит это точка C .

Чтобы научиться анализировать доказательства с точки зрения логики, снова представим рассуждения выше в виде нескольких логических цепочек со значками \Rightarrow и **И**. Но сначала разберёмся с тем, что является условием, а что заключением в теореме. Обычно теорему можно представить в виде $P \Rightarrow Q$, где P это условие, а Q заключение. Но не всегда всё так просто. В первом утверждении теоремы 4 можно выделить сразу два разных условия. P_1 – отрезок AC отложен на полупрямой AB от её начальной точки A , P_2 – $AC < AB$, а вот заключение Q одно – точка C лежит между A и B . Так что формулировку теоремы можно в наших символах представить как P_1 **И** $P_2 \Rightarrow Q$.

Мы начнём первую логическую цепочку с утверждения верного по условию P_1 , а условие P_2 используем в середине рассуждений.

1. A – начальная точка полупрямой AB , на которой лежит точка C **И** определение полупрямой \Rightarrow точки B и C лежат по одну сторону от A **И** определение «лежат по одну сторону» $\Rightarrow A$ не лежит между B и C .
2. Допустим, что точка B лежит между A и C (\neg) **И** аксиома IV $\Rightarrow AC = AB + CB$ **И** свойства положительных чисел $\Rightarrow AC > AB$ **И** условие P_2 теоремы $AC < AB \Rightarrow \otimes \Rightarrow$ точка B не лежит между A и C .
3. A не лежит между B и C **И** B не лежит между A и C **И** аксиома III \Rightarrow точка C лежит между A и B .

Теперь логическая структура доказательства видна предельно ясно. Заметим, что в одном месте мы ссылаемся на свойства положительных чисел, которые считаются известными, потому что это не часть мира геометрии, а объект из «параллельной вселенной» – алгебры.

Небольшой совет. Чтобы убедиться, что вы поняли смысл какого-нибудь доказательства (не только приведённого выше), постарайтесь закрыть текст и написать всё доказательство по памяти. В это время наверняка обнаружится, что на какие-то логические переходы вы не обратили внимание.

Упражнение 5. Отрезок $AB = 5$. На полупрямой AB отложен отрезок $AC = 3$. Как расположены точки A , B и C ? Чему равна длина отрезка BC ?

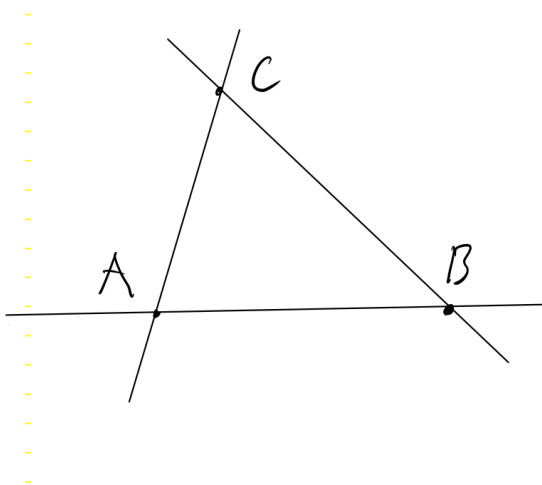
Мир точек. Наконец, мы можем наполнить каждую полупрямую точками.

Теорема 5. На каждой полупрямой AB есть неограниченное количество точек, как лежащих между точками A и B , так и не лежащих между ними.

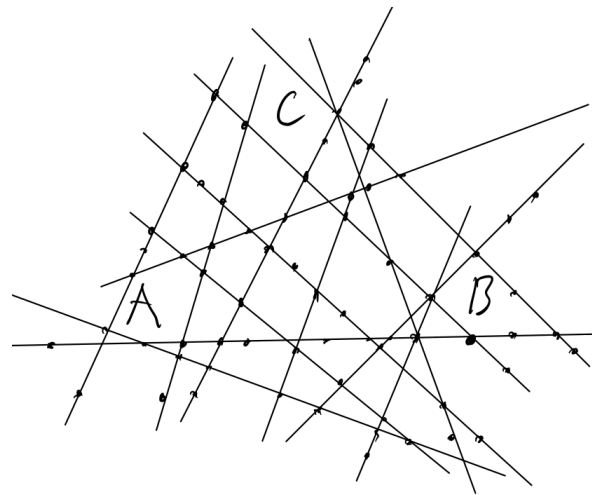
Доказательство. На полупрямой AB существуют отрезки $AX_1, AX_2, AX_3, AX_4, \dots$ длины которых меньше длины AB (**аксиома VI**). При этом по **теореме 4** точки $X_1, X_2, X_3, X_4, \dots$ лежат между точками A и B . Поскольку существует неограниченное количество чисел больших нуля и меньших длины отрезка AB , то таких точек на прямой тоже неограниченное количество.

Теперь, откладывая на полупрямой AB отрезки $AY_1, AY_2, AY_3, AY_4, \dots$ длины которых больше длины AB , получаем точки $Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, \dots$. По **теореме 4** точка B лежит между точками A и Y_1 , A и Y_2 , A и Y_3 , и так далее, значит, сами точки $Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, \dots$ не лежат между A и B (**аксиома III**). Поскольку существует сколько угодно чисел больших длины AB , то и точек $Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, \dots$ тоже сколько угодно. Теорема доказана.

Подведём промежуточные итоги. В предыдущем пункте мы показали, что из первых двух аксиом следует существование по крайней мере трёх прямых. При этом каждой прямой по аксиоме I принадлежит по крайней мере две точки A и B , а значит существуют две полупрямые AB и BA , являющиеся частями прямой AB . Теперь с помощью аксиом IV и V мы доказали, что на каждой полупрямой, а значит и на каждой прямой, лежат точки в неограниченном количестве. Если ещё вспомнить, что через каждые две точки проходит прямая, то значит в нашем мире геометрии есть сколько угодно точек и сколько угодно прямых. Мир наконец-то наполнился.



Было



Стало

Упражнение 6. Даны четыре точки: A, B, C и D . Точки A, B и C лежат на одной прямой, и точки B, C и D тоже лежат на одной прямой. Докажите, что все четыре точки лежат на одной прямой.

Упражнение 7. Даны четыре прямые a, b, c и d . Прямые a, b и c пересекаются в одной точке, и прямые b, c и d тоже пересекаются в одной точке. Докажите, что все четыре прямые пересекаются в одной точке.

Середина. Точка, которая делит отрезок на два равных отрезка, представляет особый интерес.

Определение. Точка C , принадлежащая отрезку AB , называется *серединой* отрезка AB , если $AC = BC$.

Теорема 6. У любого отрезка есть единственная середина.

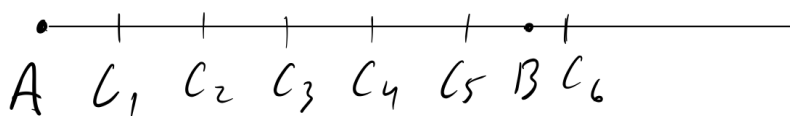
Доказательство. Пусть AB – произвольный отрезок. Отложим на луче AB отрезок AC , длина которого равна половине длины AB (**аксиома V**). Так как $AC < AB$, то по **теореме 4** точка C лежит между точками A и B , то есть принадлежит отрезку AB (**определение отрезка**). Тогда по **аксиоме IV** $AB = AC + BC$. Следовательно, $BC = AB - AC = AB - \frac{AB}{2} = \frac{AB}{2} = AC$. Значит, точка C есть середина отрезка AB (**определение середины**).

Докажем единственность середины. Допустим, что на отрезке AB существует ещё одна середина C_1 (**¬**). Отрезок AB является частью полупрямой AB (**теорема 3**), следовательно, точка C_1 принадлежит полупрямой AB . По **определению середины** $AC_1 = BC_1$, а по **аксиоме IV** $AC_1 + BC_1 = AB$. Из этого следует, что отрезок AC_1 равен половине отрезка AB . Но на полупрямой AB можно отложить только один отрезок с длиной, равной половине длины AB (**аксиома V**) и это отрезок AC (**⊗**). Следовательно, точка C является единственной серединой отрезка AB . Теорема доказана.

Упражнение 8. Доказать, что если точка C принадлежит прямой AB и $AC = CB$, то точка C является серединой отрезка AB .

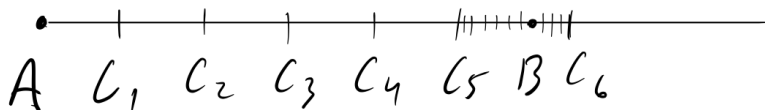
Измерение отрезков. Наконец, пришло время отдать долги. Некоторое время назад мы задавали вопрос про «измерение» отрезков. То есть, можно ли придумать процедуру с помощью которой мы узнаем, чему равна длина произвольного отрезка AB ?

Будем действовать следующим образом. Отложим на полупрямой AB отрезок AC_1 , с длиной равной единице, отрезок AC_2 , равный двум, отрезок AC_3 , равный трём и так далее. Если какая-нибудь точка C_n совпадает с точкой B , то отрезок AB и AC_n это один и тот же отрезок, следовательно длина AB равна n . Так что длина AB окажется выясненной.



Если ни одна точка не совпадёт с точкой B , то пока отрезки AC_1, AC_2 и

так далее, меньше отрезка AB , по теореме 4 точки $C_1, C_2 \dots$ будут лежать между точками A и B . Но рано или поздно найдётся точка C_n такая, что точка B будет лежать между ней и точкой A (впрочем это может быть и самая первая точка, если длина AB меньше 1). Существование такой точки следует из свойств чисел: какое бы ни было действительное число d , большее 0, существует натуральное число n большее (или равное) d . Значит можно отложить отрезок длины n , который окажется больше отрезка AB . На рисунке точка B лежит между 5-й и 6-й точками, значит длина AB больше 5, но меньше 6.



Что мы делаем в этом случае? Разобьём единичный отрезок C_5C_6 на десять частей. То есть будем откладывать теперь от точки A отрезки, начиная

с длины 5 и далее 5,1, 5,2, 5,3 ... Если конец какого-то из этих отрезков совпадёт с точкой B , то мы получим значение длины AB . Например, в нашем примере это может быть число 5,6 или 5,7. Если снова ни один из концов отрезков не совпадёт с точкой B мы получим новое, более точное ограничение на длину AB , например больше 5,6 и меньше 5,7. Что дальше? Мы можем откладывать уже отрезки с шагом 0,01, то есть 5,61, 5,62 ... и либо, наконец, получить длину AB (если какой-то из концов этих отрезков совпадёт с B), либо узнать ещё более точные ограничения на длину AB , например, больше 5,68 и меньше 5,69.

Может ли получиться так, что этот процесс не найдёт конечной точки? То есть сколько бы мы ни делили наши отрезки на 10, ни один из концов не будет совпадать с B ? Да, и это тоже следует из свойств чисел. Мы придём к результату за конечное число шагов, если длина AB является конечной десятичной дробью. В ином случае мы получим две последовательности чисел, ограничивающих длину AB снизу и сверху. Обе последовательности будут приближаться к одной и той же бесконечной десятичной дроби, являющейся длиной AB .

Легко заметить, что в мире геометрии от описанной процедуры мало толку. Мы только сопоставили некоторому воображаемому отрезку AB воображаемое число – значение длины отрезка, о существовании которой мы итак уже знали из аксиомы. Как уже говорилось, в геометрических задачах в такой процедуре нет необходимости. В задачах даны известные числа из которых нужно выразить неизвестное значение.

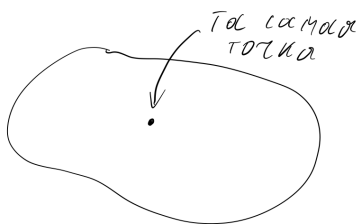
Однако между «измерением» в мире геометрии и измерением в реальном мире есть явная аналогия. Когда мы хотим узнать длину какого-нибудь протяженного предмета, мы прикладываем к этому предмету линейку или другой измерительный прибор и смотрим сколько раз на протяжении исследуемого предмета

укладывается стандартный отрезок – миллиметр, сантиметр или метр. Это значение мы и называем длиной в обычном мире. При этом длина в нашем мире узнаётся с некоторой точностью, то есть мы не делим отрезки до бесконечности, и если с помощью линейки мы видим, что длина тетради близка к 22 мм, то просто заключаем, что она больше 21,5 мм и меньше 22,5 мм. Если хочется узнать точнее, то нужен прибор с меньшими делениями, например, штангенциркуль.

Эта аналогия измерения реального и измерения абстрактного (в мире геометрии), означает, что с длинами предметов из реального мира можно работать так же, как с длинами отрезков в воображаемом мире геометрии, и для них будут выполняться те же свойства и теоремы, которые мы можем доказать. Неожиданно геометрия обнаруживается вокруг нас, в длине комнат, технических деталей, участков земли и вообще всех предметов. В этом и есть «практический смысл» геометрии, то есть возможность применять геометрию в физике, технике, архитектуре, навигации и обычной жизни (на самом деле для всего этого она изначально и создавалась).

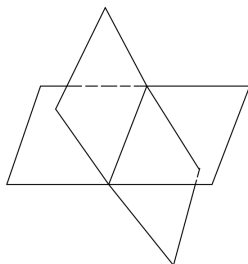
4. Пространство и плоскость

Самое время разобраться как в целом выглядит мир, который мы недавно наполнили точками. Обычно в начале изучения геометрии рассматривают фигуры, лежащие на плоскости. *Плоскость* – неопределяемое понятие, как прямая и точка. Чтобы его ввести нам понадобятся пространственные аксиомы (пространственными называют как раз такие аксиомы, которые говорят что-то о различных плоскостях).



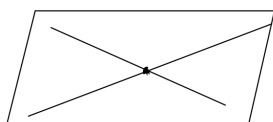
Аксиома C₁. В каждой плоскости есть по крайней мере одна точка. Существуют четыре точки, не принадлежащие одной плоскости.

Эта аксиома показывает, что геометрия точно не исчерпывается одной единственной плоскостью, потому что есть точки, не лежащие на одной плоскости.



Аксиома C₂. Если две различные плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой.

Отсюда мы узнаём, что если у двух плоскостей есть общие точки, то все они лежат на одной прямой, лежащей в обеих плоскостях.



Аксиома C₃. Если две различные прямые имеют общую точку, то через них можно провести плоскость, и притом только одну.

Эту аксиому мы скоро используем, чтобы разобраться в структуре нашего геометрического мира.

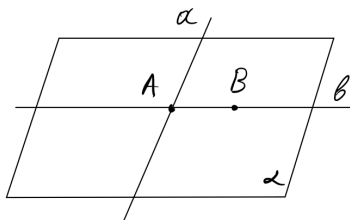
Плоскости обычно обозначают греческими буквами α (альфа), β (бета), γ (гамма).

Пространством будем называть совокупность всех точек для которых выполняются аксиомы I-X (некоторые из них мы ещё не ввели) и приведённые аксиомы C₁-C₃. Геометрию можно условно разделить на две части. *Планиметрия* – это часть геометрии в которой изучаются фигуры, лежащие на одной плоскости, а *стереометрия*⁴ – это часть геометрии в которой изучаются фигуры во всём пространстве. Возникает вопрос, где располагаются все те точки, которые мы обнаружили после доказательства теоремы 5 – на одной и той же плоскости или во всём пространстве? Чтобы разобраться в этом используем пространственные аксиомы. Нам понадобится установить несколько новых фактов.

Теорема 7. Через прямую и не лежащую на ней точку можно провести плоскость и притом только одну.

Доказательство. Обозначим данную прямую a , а не лежащую на ней точку – B .

Отметим на прямой a какую-нибудь точку A (аксиома I) и проведём через точки A и B прямую b (аксиома II). Прямые a и b имеют общую точку A , значит, по аксиоме C₃ через них проходит единственная плоскость α . При этом плоскость α проходит через прямую a и точку B .



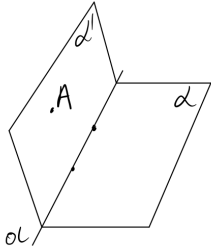
Докажем теперь, что плоскость, проходящая через данные прямую и точку, единственная. Допустим, что

существует отличная от α , плоскость β , проходящая через прямую a и точку B (\neg). По аксиоме C₂ имеющие общую точку B плоскости α и β должны пересекаться по прямой. На этой прямой лежат любые три общие точки плоскостей α и β . Но поскольку точка B не принадлежит прямой a , точка B и какие-нибудь две точки прямой a заведомо не лежат на одной прямой \otimes . Значит, плоскость α единственная. Теорема доказана.

Теорема 8. Если две точки прямой принадлежат плоскости, то вся прямая лежит в этой плоскости.

Доказательство. Обозначим данную прямую a , а данную плоскость – α . Требуется доказать, что вся прямая a лежит в плоскости α . По аксиоме I существует точка A , не лежащая на прямой a . Проведём через прямую a и точку A плоскость α' (теорема

⁴ Стереометрия обычно изучается в 10 и 11 классах школы.

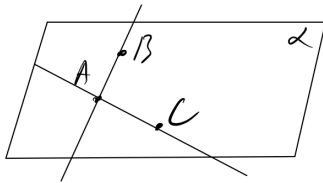


7). Если плоскость α' совпадает с α (то есть окажется той же самой плоскостью), то плоскость α содержит прямую a (ведь по построению эта прямая лежит в плоскости α').

Если плоскость α' отлична от α , то эти плоскости, имея две общие точки, пересекаются по прямой a' (аксиома C_2). Прямой a' принадлежат все общие точки плоскостей α' и α , а значит, в том числе две точки прямой a . Тогда, по аксиоме II прямая a' совпадает с a и, таким образом, прямая a лежит в плоскости α . Теорема доказана.

Теорема 9. Через три точки, не лежащие на прямой, можно провести плоскость и притом только одну.

Доказательство. Пусть A, B, C – данные три точки, не лежащие на одной прямой.



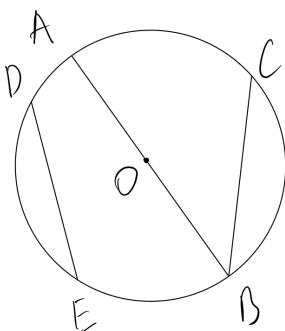
Проведём прямые AB и AC (аксиома II). По аксиоме C_3 через пересекающиеся прямые AB и AC можно провести плоскость, которая содержит точки A, B, C .

Докажем, что полученная плоскость единственная.

Действительно, плоскость, содержащая точки A, B, C , по теореме 8 содержит прямые AB и AC . Но по аксиоме C_3 такая плоскость единственная. Теорема доказана.

Теперь мы можем ответить на вопрос о том, где располагаются все прямые и точки, которыми мы наполнили наш мир с помощью теоремы 5. Прежде всего заметим, что изначально по аксиоме I мы имели три точки, через которые затем, пользуясь аксиомой II, провели три пересекающиеся прямые. Теперь благодаря теореме 9 мы знаем, что эти три исходные точки лежат в одной плоскости, а теорема 8 показывает, что и проведённые через точки прямые тоже лежат в этой самой плоскости. Но тогда и все точки этих прямых и все прямые, проходящие через эти точки, тоже лежат в этой плоскости. Весь построенный в предыдущих пунктах мир уместается на одной плоскости.

Заметим, что благодаря аксиоме V мы должны представлять себе прямую и плоскость неограниченными. Действительно, допустим какой-то читатель нашей



книги никогда не изучал геометрию в школе, и поэтому ничего не знает о том как должна выглядеть прямая на рисунке. Читая аксиомы он представлял себе плоскость, состоящей из точек, лежащих на ограниченном расстоянии от некоторой точки O . То есть в виде круга. А прямые он представлял заканчивающимися на границах этой плоскости. Как, например, прямые AB и BC на рисунке. Тогда вплоть до аксиомы V наш читатель не

встретил бы никаких противоречий со своим мысленным образом. Первые четыре аксиомы и все следующие из них теоремы выполняются на плоскости в виде круга⁵. Но после аксиомы V такое представление уже не годится, потому что, например, на полупрямой OB нельзя отложить отрезок с длиной большей длины отрезка OB .

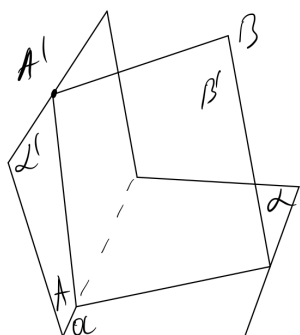
Точки пространства. Перед тем как дальше развивать планиметрию, хорошо бы наполнить точками всё пространство. То есть показать, что в пространстве есть неограниченное количество плоскостей и на каждой из них есть неограниченное количество точек. В этом нам поможет следующая теорема.

Теорема 10. Любой плоскости принадлежит неограниченное количество точек, не лежащих на одной прямой.

Доказательство. Пусть α – произвольная плоскость. Прежде всего докажем, что в ней лежит по крайней мере одна прямая. По **аксиоме I** существуют три точки, не лежащие на одной прямой. Выберем эти три точки и проведём через них плоскость β (**теорема 9**). Если плоскость β совпадёт с α , то в плоскости α есть три точки, через две из которых можно провести прямую (**аксиома II**). Пусть β не совпадает с α .

Если плоскость β пересекается с плоскостью α , то по **аксиоме C₂** в плоскости α лежит прямая a , являющаяся прямой пересечения плоскостей α и β . Если β не пересекается с α , обозначим A точку, принадлежащую плоскости α (**аксиома C₁**) и проведём через какие-нибудь две точки плоскости β и точку A плоскость γ .

Плоскость γ пересечёт α по прямой a (**аксиома C₂**).



Теперь докажем, что на плоскости α найдутся точки, не лежащие на прямой a . Отметим точку A на прямой a (**аксиома I**) и точку A' вне плоскости α (**аксиома C₁**). Проведём плоскость α' через прямую a и точку A' (**теорема 7**). Возьмём точку B вне плоскости α' . Если B принадлежит α , то через неё и какую-нибудь точку a можно провести прямую, лежащую в плоскости α (**теорема 8**). В противном случае проведём через прямую AA' и точку B плоскость β' . Плоскости α и β' пересекаются по прямой, проходящей через точку A . Точки этой прямой, отличные от A , лежат в

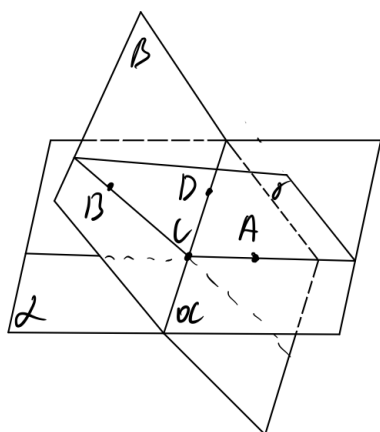
плоскости α вне прямой a . Теорема доказана.

⁵ Позже можно будет убедиться, что на ней выполняются и аксиомы VI и VII, до которых мы скоро дойдём. Так что все теоремы, в доказательстве которых используются только аксиомы I, II, III, IV, VI и VII, выполняются на плоскости-круге.

Заметим, что при доказательстве существования точек вне прямой a мы не могли сослаться на аксиому I, поскольку эта аксиома не гарантирует наличие точки вне прямой a на какой-то конкретной плоскости (в данном случае α).

Поскольку на любой прямой лежит неограниченное количество точек, а через любые две точки можно провести новую прямую, из теоремы 10 следует, что на любой плоскости есть неограниченное количество прямых и на них есть неограниченное количество точек.

Рассмотрим вопрос о количестве плоскостей в пространстве. Из пространственных аксиом следует существование по крайней мере двух



плоскостей, пересекающихся по некоторой прямой a .

Действительно, так как существуют четыре точки, не лежащие в одной плоскости, мы можем провести плоскость α через какие-то три из них и ещё одну плоскость β через две точки плоскости α и одну точку вне её. Теперь в соответствии с теоремой 10 мы можем выбрать точку A , не принадлежащую прямой a , на плоскости α и не принадлежащую прямой a точку B на плоскости β . Через эти две точки и какую-нибудь точку C прямой a можно провести третью плоскость – γ .

Теперь, выбрав на прямой a новую точку D , через неё и точки A и B можно провести четвёртую плоскость и так далее. Мы получаем, что в пространстве геометрии есть неограниченное количество плоскостей и лежащих на них точек.

Упражнение 9. Докажите, что если точки A, B, C, D не лежат в одной плоскости, то прямые AB и CD не пересекаются.

Упражнение 10. Пусть три различные плоскости попарно пересекаются. Докажите, что если две из прямых пересечения этих плоскостей пересекаются, то третья прямая проходит через точку их пересечения.

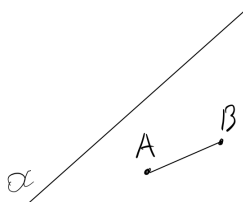
5. Полуплоскость

Теперь мы вернёмся к планиметрии, так что во всех следующих теоремах будет подразумеваться, что фигуры лежат на одной и той же плоскости.

Для начала новой истории заметим, что отрезок может пересекаться с прямой потому что он сам является частью некоторой прямой. *Отрезок AB пересекается с прямой a , не совпадающей с прямой AB , если у отрезка AB и прямой a есть общая*

точка. Поскольку прямая AB и прямая a могут пересекаться только в одной точке, то и отрезок AB пересекается с прямой a только в одной точке. Теперь дадим определение главной героине этого пункта – полуплоскости, которой будут принадлежать все точки, расположенные с одной стороны от некоторой прямой.

Определение. Пусть дана прямая a и не лежащая на ней точка A . Полуплоскостью точки A называется часть плоскости, которая состоит из точки A и всех точек плоскости, кроме точек прямой a , для которых соединяющий их с A отрезок не пересекает прямую a .

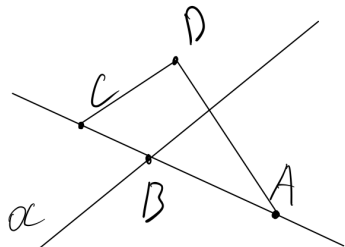


Сложноватое определение, но смысл у него простой. Если B – некоторая точка, не лежащая на прямой a , и отрезок AB не пересекается с прямой a , то точка B принадлежит полуплоскости точки A . При этом точки самой прямой a по определению не принадлежат полуплоскости, хотя и обладают данным свойством.

Аксиома VI. Прямая разбивает плоскость на две полуплоскости так, что каждая точка плоскости, кроме точек этой прямой, попадает либо в одну полуплоскость, либо в другую.

Полуплоскости это что-то вроде двух граничащих стран в мире геометрии. Их существование, как наличие точек с двух сторон от прямой, кажется очевидным. Тогда нельзя ли обойтись без аксиомы VI и доказать что полуплоскостей с общей границей у нас две?

То что существует одна какая-нибудь полуплоскость ясно итак. Пользуясь только аксиомой I мы получаем, что существует прямая a и какая-нибудь не лежащая на ней точка A . Значит существует и полуплоскость которой принадлежит, как минимум, сама точка A . Теперь возьмём на прямой a какую-нибудь точку B и



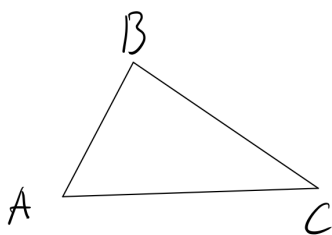
проведём прямую AB , пересекающую прямую a .

Отложим на полупрямой AB отрезок AC , больший AB . Тогда по теореме 4 точка B будет лежать между точками A и C . Следовательно, отрезок AC пересекает прямую a в точке B и точка C лежит уже в другой полуплоскости, нежели точка A . Вот мы и получили две полуплоскости! Тогда в чём же смысл аксиомы VI?

Дело вот в чём – дальше надо доказать, что любая другая точка плоскости, не лежащая на прямой a , попадает либо в полуплоскость точки A , либо в полуплоскость точки C . То есть, что полуплоскостей ровно две, а не сколько угодно. Пусть, скажем, D – некоторая точка плоскости. Если отрезок AD не

пересекается с прямой a , то тут всё понятно – по определению точка D лежит в полуплоскости точки A . А если отрезок AD пересекается с прямой a ? Будет ли тогда отрезок DC точно не пересекаться? Или может быть D попадёт в какую-то третью полуплоскость? Оказывается, что выяснить это без аксиомы VI мы не можем. А вот с аксиомой VI всё просто – раз полуплоскостей только две, и точка D не лежит в полуплоскости точки A , то точка D лежит в полуплоскости точки C , следовательно, отрезок DC не пересекает прямую a .

Сформулируем рассуждение выше в виде полезной теоремы. Только сначала введём ещё одну геометрическую фигуру – треугольник.

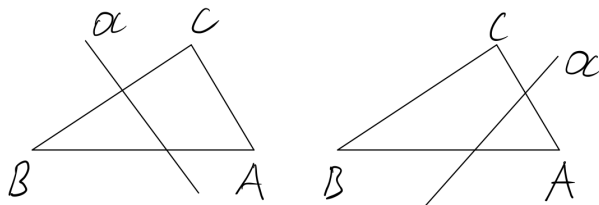


Определение. *Треугольником* называется фигура, которая состоит из трёх точек, не лежащих на одной прямой, и трёх попарно соединяющих их отрезков. Эти точки называются *вершинами* треугольника, а отрезки – *сторонами*.

Треугольник обозначается указанием его вершин, например, $\triangle ABC$. Существование треугольника непосредственно следует из аксиом I и IV.

Возможно, вам не нравится использование в определении треугольника слова «фигура», которому мы затруднились придать точное значение в самом начале книги. Тогда понимайте треугольник просто как три точки и три соединяющих их отрезка, рассматриваемые совместно.

Теорема 11 (Паш, 1882). Если прямая a , не проходящая ни через одну из вершин треугольника ABC , пересекает его сторону AB , то она пересекает и притом только одну из двух других сторон, BC или AC .

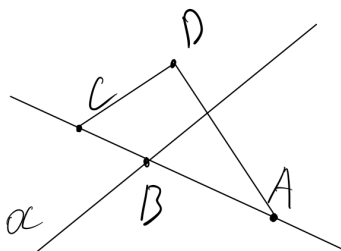


Доказательство. Прямая a разбивает плоскость на две полуплоскости. Поскольку отрезок AB пересекается с прямой a , **по определению** точка B не лежит в полуплоскости точки A . Точка C лежит либо в полуплоскости точки A либо в полуплоскости точки B (**аксиома VI**). Если точка C лежит в полуплоскости точки A , то **по определению** отрезок AC не пересекается с прямой a , а отрезок BC пересекается с этой прямой (иначе точка C лежала бы ещё и в полуплоскости точки

B , но это противоречит **аксиоме VI**). Если точка C лежит в полуплоскости точки B , то отрезок BC не пересекается с прямой a , а отрезок AC пересекается. В обоих случаях прямая a пересекает и притом только один из отрезков AC или BC . Теорема доказана.

Обсуждение аксиоматики. Вообще-то немецкий математик Мориц Паш (1843 – 1930) сформулировал не теорему, а аксиому, которую до него использовали как нечто само собой разумеющееся. Но в нашей аксиоматике мы смогли доказать утверждение Паша с помощью аксиомы VI. Можно ли сделать наоборот? Доказать что прямая разбивает плоскость ровно на две полуплоскости, приняв утверждение теоремы 11 за аксиому? Попробуем. Временно будем называть утверждение теоремы 11 «аксиомой Паша», а нашу аксиому VI – теоремой VI.

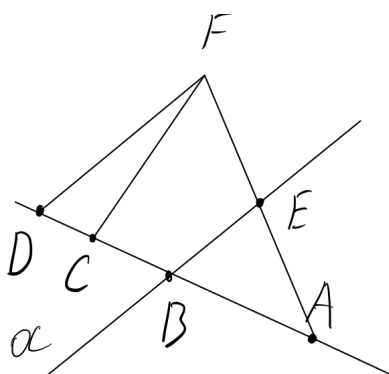
В обсуждении выше мы показали, что если взять некоторую прямую a , то существование двух полуплоскостей доказать легко. Не получалось доказать, что их ровно две. Продолжим те же самые рассуждения. Пусть некоторые точки A и C лежат в разных полуплоскостях относительно прямой a , и отрезок AC пересекает прямую a в точке B . Пусть D – некоторая точка плоскости, не лежащая на прямой a . Если отрезок AD не пересекается с прямой a , то точка D по определению попадает



в полуплоскость точки A . Докажем, что если отрезок AD пересекается с прямой a , то точка D неизбежно окажется в полуплоскости точки C . Здесь возможны два случая – если точка D лежит на прямой AC и если не лежит на этой прямой. Сначала рассмотрим второй случай. Если точка D не лежит на прямой AC , то существует треугольник ADC . Прямая a пересекает его сторону AC и пересекает его сторону

AD , значит, по аксиоме Паша она уже не может пересекать отрезок CD . Следовательно, по определению точка D лежит в полуплоскости точки C .

Теперь рассмотрим второй случай. Пусть точка D лежит на прямой AC и точка B разделяет точки A и D . Надо доказать, что отрезок CD не пересекается с прямой a (на рисунке это кажется очевидным, но нам нужно строгое доказательство).



Возьмём на прямой a точку E , отличную от B , и отложим на полупрямой AE отрезок AF , больший AE . Теперь точка E лежит между точками A и F , и прямая AF не совпадает с прямой AC . Значит, по уже доказанному, точка F лежит в полуплоскости точки C и отрезок FC не пересекается с прямой a .

Рассмотрим треугольник FDA . Прямая a пересекает его стороны AD и FA , следовательно, по аксиоме Паша она уже не может пересекать сторону FD . Рассмотрим также треугольник FDC . Если бы

прямая a пересекала его сторону CD , то по аксиоме Паша она должна была пересекать и одну из двух других сторон FD или FC , но мы доказали, что прямая a их не пересекает, значит, не пересекает она и сторону CD , что по определению полуплоскости означает, что точка D лежит в полуплоскости точки C .

Итак, мы доказали, что любая точка плоскости попадает либо в полуплоскость точки A , либо в полуплоскость точки C относительно прямой a , следовательно прямая a разбивает плоскость на две полуплоскости. Теорема VI доказана.

Вернёмся к обычным названиям. Мы показали, что утверждения аксиомы VI и теоремы 11 являются взаимозаменяемыми. Если принять одно из них за аксиому, то второе становится теоремой. В логике такие утверждения, когда истинность одного неизбежно влечёт истинность второго, называются *равносильными*. Мы ещё не раз встретимся с этим в нашем рассказе.

Свойства полуплоскостей. Благодаря теореме 11 мы можем установить взаимосвязь точек, лежащих в одной полуплоскости. Но сначала докажем лемму (*лемма* – это вспомогательное утверждение, нужное для доказательства какой-нибудь теоремы).

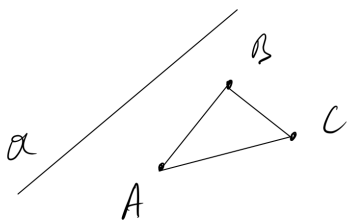
Лемма 1. Если прямая a пересекается с прямой b в точке A , то любой отрезок прямой a пересекается с прямой b тогда и только тогда, когда этот отрезок содержит точку A .

Доказательство. Если отрезок содержит точку A , принадлежащую прямой b , то он пересекает прямую b **по определению пересечения**.

Допустим, что некоторый отрезок прямой a не содержит точку A , но пересекается с прямой b в точке B , отличной от A (\neg). Отрезок является частью прямой a (**по определению**), следовательно, точка B тоже является точкой прямой a . Таким образом, прямые a и b пересекаются в двух точках – A и B , что противоречит **теореме 2** \otimes . Следовательно, отрезок прямой a может пересекаться с прямой b , только если содержит точку A . Лемма доказана.

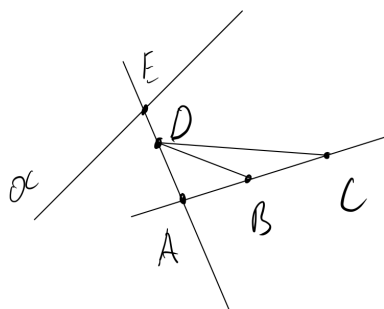
Теорема 12.1. Если две точки лежат в одной полуплоскости относительно данной прямой, то отрезок, соединяющий эти точки, не пересекает данную прямую.

Доказательство. Пусть a – данная прямая и A точка, не лежащая на прямой a . Пусть некоторые точки B и C лежат в полуплоскости точки A . Докажем, что отрезок BC не пересекается с прямой a . Будем рассматривать два случая, когда точки B и C лежат на одной прямой с точкой A и когда они не лежат на одной прямой с точкой A .



Сначала рассмотрим случай, когда точки A, B, C не лежат на одной прямой. Тогда существует треугольник ABC (по определению). Если бы прямая a пересекала сторону BC треугольника, то по теореме 11 она должна была пересекать либо сторону AB , либо сторону AC . Но поскольку точки B и C лежат в полуплоскости точки A , прямая a по определению полуплоскости не пересекает отрезки AB и AC . Следовательно, не пересекает она и отрезок BC .

Случай когда все три точки лежат на одной прямой рассматривать немного



сложнее. Пусть E произвольная точка прямой a , не являющаяся точкой пересечения прямых a и AC . Тогда прямая AE не совпадает с прямой AC . Отложим на полупрямой AE отрезок AD , меньший AE . По теореме 4 точка D лежит между точками A и E , следовательно, точка E не лежит между точками A и D , и не принадлежит отрезку AD (определение отрезка). Тогда по лемме 1 отрезок AD не пересекает прямую a , и, следовательно, точка D лежит в полуплоскости точки A , но не принадлежит прямой

AC .

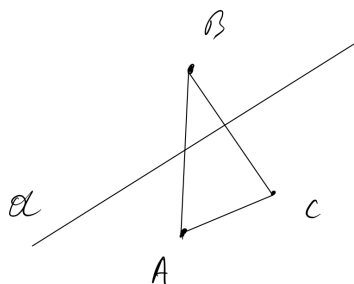
Рассмотрим треугольник ADC . Прямая a не пересекает отрезок AD и не пересекает отрезок AC , потому что точки D и C лежат в полуплоскости точки A . Тогда с помощью теоремы 11 заключаем, что прямая a не пересекает и отрезок DC . Аналогично, рассматривая треугольник ABD , заключаем, что прямая a не пересекает и его сторону DB . Наконец, рассмотрим треугольник DBC . Мы доказали, что прямая a не пересекает стороны DB и DC , а значит, она не пересекает и сторону BC .

Итак, в обоих случаях если точки B и C лежат в одной полуплоскости относительно прямой a , то прямая a не пересекает отрезок BC . Теорема доказана.

Из теоремы 12.1 следует, что если отрезок AB не пересекает прямую a , то полуплоскости точек A и B совпадают, то есть состоят из одних и тех же точек. Действительно, раз отрезок AB не пересекается с прямой a , можно сказать, что точка B лежит в полуплоскости точки A . Если некоторая точка C лежит в полуплоскости A , то по теореме 12.1 отрезок BC не пересекается с прямой a , а значит, можно сказать, что точка C лежит и в полуплоскости точки B . Аналогично доказывается обратное, что если точка C лежит в полуплоскости точки B , то она лежит и в полуплоскости точки A .

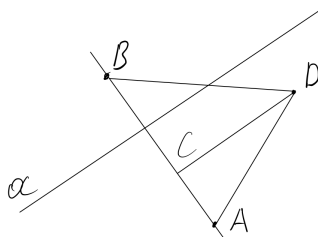
Теорема 12.2. Если две точки лежат в разных полуплоскостях относительно данной прямой, то отрезок, соединяющий эти точки, пересекает данную прямую.

Доказательство. Пусть a – данная прямая, A – точка, не лежащая на прямой a . Некоторая точка C лежит в полуплоскости точки A , а точка B не лежит. Тогда по определению полуплоскости отрезок AC не пересекается с прямой a , а отрезок AB пересекается. Докажем, что отрезок BC пересекается с прямой a .



Снова придётся рассматривать два случая. Первый случай, когда точки A, B, C не лежат на одной прямой. Тогда существует треугольник ABC , прямая a пересекает его сторону AB и не пересекает сторону AC , значит, по теореме 11 прямая a пересекает сторону BC .

Рассмотрим случай, когда точки A, B, C лежат на одной прямой. Пусть точка D лежит в полуплоскости точки A , но не на прямой AC . Её можно построить точно так же как в доказательстве теоремы 12.1. Значит, существует треугольник DBA , в котором прямая a не пересекает сторону DA , но пересекает сторону AB . Тогда прямая a пересекает сторону DB (теорема 11).

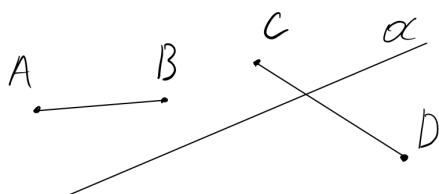


В треугольнике DBC прямая a пересекает DB и, по теореме 12.1, не пересекает сторону DC (ведь точки D и C лежат в полуплоскости точки A). Значит, прямая a пересекает сторону BC треугольника DBC (теорема 11). Теорема доказана.

Из теоремы 12.2 следует, что если отрезок BC не пересекает прямую a , то точки B и C лежат в одной полуплоскости относительно прямой a . Ведь если бы они лежали в разных полуплоскостях, то отрезок BC пересекал бы прямую a . Значит, можно сформулировать теорему 12 следующим образом.

Теорема 12. Две точки, не лежащие на данной прямой, принадлежат одной полуплоскости тогда и только тогда, когда соединяющий их отрезок не пересекается с данной прямой.

Доказательство. Следует из теорем 12.1 и 12.2. Теорема доказана.



Теорема 12 имеет простой смысл, который мы будем часто использовать в дальнейшем. Например, на рисунке точки C и D лежат в разных полуплоскостях относительно прямой a , но точки A и B лежат в одной полуплоскости (той же, что и

точка C) относительно прямой a .

Логический разбор. Теоремы 12.1, 12.2 и 12 дают просторное поле для логического анализа. Обозначим условие теоремы 12.1 буквой P – «две точки лежат в одной полуплоскости относительно данной прямой», заключение теоремы 12.1 обозначим Q – «отрезок, соединяющий эти точки не пересекает данную прямую». Теорема 12.1 заключается в том, что $P \Rightarrow Q$. Сформулируем обратную теорему, то есть такую, что $Q \Rightarrow P$: «Если отрезок не пересекает данную прямую, то его концы лежат в одной полуплоскости, относительно данной прямой». Ситуация, когда выполняются следствия $P \Rightarrow Q$ и $Q \Rightarrow P$ коротко записывается с помощью нового значка $P \Leftrightarrow Q$ (читается « P равносильно Q »). Утверждения P и Q называются *равносильными*. Мы уже обсуждали, что, например, утверждения аксиомы VI и теоремы 11 являются равносильными. Окончательная формулировка теоремы 12 и заключается в том, что $P \Leftrightarrow Q$. За равносильность в ней отвечают слова «тогда и только тогда». При этом слово «только» означает, что если Q не выполняется, то не выполняется и P . То есть оба утверждения истинны или ложны одновременно.

Однако вместо утверждения P в теореме 12.2 мы доказали нечто иное, а именно, что «Если две точки лежат в разных полуплоскостях относительно данной прямой, то отрезок, соединяющий эти точки, пересекает данную прямую». Здесь условие состоит в том, что «две точки лежат в разных полуплоскостях относительно данной прямой», а заключение – «отрезок, соединяющий эти точки, пересекает данную прямую». Заметим, что приведённое условие это отрицание утверждения P , то есть $\neg P$, а приведённое заключение это отрицание утверждения Q , то есть $\neg Q$. Получается, что теорема 12.2 это теорема вида $\neg P \Rightarrow \neg Q$. Такая теорема называется *противоположной* к $P \Rightarrow Q$. Вообще у нас получается четыре возможных варианта теорем, которые мы расположим в виде схемы.

Прямая $P \Rightarrow Q$

Обратная $Q \Rightarrow P$

Противоположная $\neg P \Rightarrow \neg Q$

Противоположная к обратной $\neg Q \Rightarrow \neg P$

Для удобства приведём все теоремы вместе.

- 1) $P \Rightarrow Q$ (теорема 12.1): Если две точки лежат в одной полуплоскости относительно данной прямой, то отрезок, соединяющий эти точки не пересекает данную прямую.
- 2) $Q \Rightarrow P$: Если отрезок не пересекает данную прямую, то его концы лежат в одной полуплоскости, относительно данной прямой.

- 3) $\neg P \Rightarrow \neg Q$ (теорема 12.2): Если две точки лежат в разных полуплоскостях относительно данной прямой, то отрезок, соединяющий эти точки, пересекает данную прямую.
- 4) $\neg Q \Rightarrow \neg P$: Если отрезок пересекает данную прямую, то его концы не лежат в одной полуплоскости, относительно данной прямой.

Четвёртый вариант мы не формулировали и не доказывали. Однако заметим, что если верна первая из этих теорем, то верна и четвёртая. Ведь если бы концы отрезка лежали в одной полуплоскости, то отрезок не пересекал бы прямую. В тоже время, как было сказано, если верна третья теорема списка (то есть теорема 12.2), то верна и вторая. Получается, что теоремы, расположенные по диагонали нашей схемы, верны или неверны одновременно. Такое положение дел не случайно и может быть доказано на уровне самой логики, отвлекаясь от конкретного геометрического содержания теорем. Пусть, например, выполняется теорема $\neg Q \Rightarrow \neg P$, докажем, что тогда $P \Rightarrow Q$. Будем рассуждать от противного. Допустим, что $P \Rightarrow \neg Q$, но тогда с учётом $\neg Q \Rightarrow \neg P$ получаем цепочку следствий $P \Rightarrow \neg Q \Rightarrow \neg P$, то есть из истинности P следует истинность его отрицания, а истинность отрицания означает ложность P , что противоречит закону исключенного третьего – P либо истинно, либо ложно. Следовательно, $P \Rightarrow Q$. Аналогично доказывается в обратную сторону. Пусть выполняется, что $P \Rightarrow Q$, докажем, что тогда $\neg Q \Rightarrow \neg P$. Снова от противного допустим, что $\neg Q \Rightarrow P$, тогда $\neg Q \Rightarrow P \Rightarrow Q \otimes$. Получаем, что $\neg Q \Rightarrow \neg P$. Таким образом, прямая и противоположная к обратной теоремы всегда выполняются одновременно. Точно также доказывается, что обратная и противоположная теоремы выполняются или не выполняются одновременно. Значит, для доказательства равносильности $P \Leftrightarrow Q$ достаточно доказать любые две теоремы, расположенные в одной строке или в одном столбце схемы. Мы собственно и сделали это, доказав теоремы 12.1 и 12.2, то есть $P \Rightarrow Q$ и $\neg P \Rightarrow \neg Q$.

Упражнения. Чтобы освоиться с новыми правилами игры, сделаем несколько упражнений.

Упражнение 11. Прямая AB пересекает отрезок CD , а прямая CD пересекает отрезок AB . Докажите, что отрезки AB и CD пересекаются.

Упражнение 12. Дана прямая a и не лежащие на ней точки A, B, C и D . Отрезки AB, BC и CD пересекают прямую a . Пересекает ли прямую a отрезок AD ? Обоснуйте ответ.

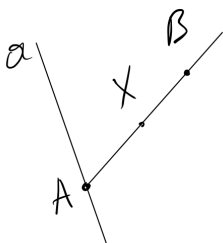
Упражнение 13. Дана прямая a и не лежащие на ней точки A , B , C и D . Отрезки AB и CD не пересекают прямую a , отрезок BC пересекает прямую a . Пересекает ли прямую a отрезок AD ? Обоснуйте ответ.

Упражнение 14. Дана прямая a и не лежащие на ней точки A , B , C и D . Отрезки AB , BC и CD не пересекаются с прямой a . Пересекает ли прямую a отрезок AD ? Обоснуйте ответ.

6. Полупрямая

Докажем несколько теорем, показывающих связь между полупрямыми и полуплоскостями. Эти факты используются при строгом доказательстве свойств многих геометрических фигур, которые, кстати, как правило состоят из отрезков и полупрямых.

Теорема 13. Пусть через начальную точку A полупрямой AB проведена прямая a , отличная от прямой AB . Тогда полупрямая AB состоит из тех и только тех точек прямой AB , которые лежат в одной полуплоскости с точкой B относительно прямой a .



Доказательство. Возьмём произвольную точку X на полупрямой AB . Точки X и B лежат по одну сторону от точки A (**определение полупрямой**). Следовательно, точка A не принадлежит отрезку XB (**определение отрезка**). Значит, отрезок XB не пересекает прямую a (**лемма 1**). Так как отрезок XB не пересекается с прямой a , то точка X лежит в одной полуплоскости с точкой B относительно прямой a (**теорема 12**).

Если X – точка прямой AB , лежащая в одной полуплоскости с точкой B , то отрезок BX не пересекается с прямой a (**теорема 12**). Следовательно, точка A не принадлежит отрезку BX (**лемма 1**). Значит, точки B и X лежат по одну сторону от точки A , то есть точка X принадлежит полупрямой AB (**определение полупрямой**). Теорема доказана.

Логический разбор. Обсудим логику приведённого доказательства. Для начала надо определиться, что здесь является условием P , а что заключением Q теоремы. На первый взгляд условие теоремы в том, что точка A является начальной точкой полупрямой AB , и через неё проведена прямая a , причём точка B не лежит на прямой a . Заключение теоремы в том, что полупрямая AB состоит из тех и только тех точек прямой AB , которые лежат в одной полуплоскости с точкой B относительно прямой a .

Однако фактически в приведённом заключении содержится два разных утверждения. Во-первых, полупрямая AB состоит **из тех** точек прямой AB , которые лежат в одной полуплоскости с точкой B . Значит, если точка X принадлежит прямой AB и лежит в полуплоскости точки B относительно прямой a , проходящей через точку A (утверждение P), то X принадлежит полупрямой AB (утверждение Q). Именно это мы доказали во втором абзаце доказательства. Во-вторых, полупрямая AB состоит **только** из тех точек прямой AB , которые лежат в одной полуплоскости с точкой B . Значит, если какая-нибудь точка X прямой AB не принадлежит полуплоскости точки B (утверждение $\neg P$), то X не принадлежит полупрямой AB (утверждение $\neg Q$).

Однако вместо доказательства теоремы $\neg P \Rightarrow \neg Q$ в первом абзаце доказательства мы доказали другое: если какая-нибудь точка X принадлежит полупрямой AB (утверждение Q), то X принадлежит прямой AB и X лежит в одной полуплоскости с точкой B (утверждение P). То есть в первом абзаце мы доказали $Q \Rightarrow P$. Вспоминаем схему из четырёх теорем, которую мы составляли анализируя теорему 12⁶, и видим, что данные теоремы в ней расположены по диагонали. Мы снова обнаруживаем, что диагональные теоремы взаимозаменяемы. Однако я предлагаю непосредственно доказать $\neg P \Rightarrow \neg Q$ в качестве упражнения.

Упражнение 15. Изменить первый абзац доказательства теоремы 13, показав, что если точка X прямой AB не лежит в полуплоскости точки B , относительно прямой a , то X не принадлежит полупрямой AB .

Получается, что наша теорема с точки зрения логики состоит из двух теорем – прямой и обратной (либо прямой и противоположной). Поэтому для полного доказательства теоремы 13 нужно было построить две цепочки рассуждений, что мы и сделали в разных абзацах доказательства. Сначала в первом абзаце доказательства мы доказываем что $Q \Rightarrow P$, а во втором абзаце мы доказываем что $P \Rightarrow Q$. Таким образом, мы доказали равносильность $P \Leftrightarrow Q$. Вообще равносильность всегда подразумевается, когда в теореме встречаются выражения «тогда и только тогда, когда», «если, и только если», «необходимо и достаточно». Во всех этих случаях рассуждение надо провести в обе стороны, как мы это видели ещё на примере теоремы 12.

Упражнение 16. Сформулировать все четыре варианта теорем для утверждений P и Q .

⁶ Как вы могли заметить, такую схему удобно составлять когда речь идёт об условиях принадлежности точек каким-либо фигурам.

Упражнение 17. Запишите доказательство теоремы 13 в виде двух цепочек логических выводов (с использованием знаков \Rightarrow и **И**). В первой докажите что $Q \Rightarrow P$, а во второй $P \Rightarrow Q$, как мы делали для других теорем ранее.

Упражнение 18. Запишите в виде логической цепочки доказательство из упражнения 15.

Упражнение 19. Проанализируйте лемму 1 по схеме из четырёх теорем – прямой, обратной, противоположной и противоположной к обратной.

Теперь про отрезки. Для отрезков, очевидно, выполняется тоже свойство, которое мы доказали для полупрямых в теореме 13.

Теорема 14. Если через конец A отрезка AB провести прямую a , отличную от прямой AB , то весь отрезок AB будет в одной полуплоскости относительно прямой a . Именно, он будет в полуплоскости точки B .

Доказательство. Следует из того, что отрезок AB является частью полупрямой AB (теорема 3) и теоремы 13. Теорема доказана.

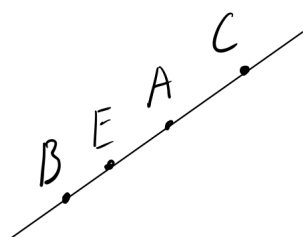
Как видите, иногда теоремы доказываются достаточно просто, следуя из предыдущих теорем.

Упражнение 20. Отрезки AB и CD лежат на разных прямых и пересекаются в точке O . Доказать, что отрезок BD не пересекает прямую AC .

Упражнение 21. Дан треугольник ABC . На стороне AC взята точка D , а на стороне BC – точка E . Докажите, что отрезки AE и BD пересекаются.

Про полупрямые. Теперь, наконец, мы можем доказать, что точка, лежащая на прямой, делит её на две полупрямые. Возможно вам до сих пор было очевидно, что точка на прямой образует две полупрямые, но доказать без аксиомы VI, что их ровно две, оказывается нельзя.

Суть дела здесь аналогична тому, что обсуждалось сразу после аксиомы VI на счёт полуплоскостей. Пусть на прямой a имеются три точки B, A, C , и точка A лежит



между точками B и C . Тогда существуют две полупрямые AB и AC . Если взять некоторую точку E , такую, что A лежит между E и C , то по определению полупрямой точка E не лежит на полупрямой AC , но значит ли это, что точка E принадлежит полупрямой AB ? Или, может быть AE это ещё одна, третья

полупрямая? Чтобы доказать, что третьей полупрямой нет и полупрямые AE и AB совпадают, нужно убедиться, что точка A не разделяет точки B и E .

Лемма 2. Пусть A некоторая точка прямой a . На прямой a существуют точки B и C , лежащие по разные стороны от точки A .

Доказательство. Отметим на прямой a ещё одну точку – B (аксиома I). На полупрямой BA отложим отрезок BC , больше отрезка BA (аксиома IV), тогда точка A будет лежать между точками B и C (теорема 4). Лемма доказана.

Упражнение 22. Запишите доказательство леммы 2 в виде логической цепочки.

Теорема 15. Точка A , лежащая на прямой a , разбивает эту прямую на две полупрямые с начальной точкой A . Точки одной полупрямой не разделяются точкой A , а точки различных полупрямых разделяются этой точкой.

Доказательство. Проведём через точку A прямую b , отличную от прямой a (теорема 1). По лемме 2 на прямой a существуют точки B и C , лежащие по разные стороны от точки A . Следовательно, точка A принадлежит отрезку BC (по определению отрезка), который пересекает прямую b в точке A (по определению). Значит, точки B и C лежат в разных полуплоскостях относительно прямой b (теорема 12). Тогда все точки прямой a , лежащие в одной полуплоскости с точкой B составляют полупрямую AB (теорема 13), а все точки прямой a , лежащие в полуплоскости точки C , составляют полупрямую AC . Прямые a и b имеют только одну общую точку (теорема 2), следовательно, каждая точка прямой a , кроме точки A , лежит в одной из двух полуплоскостей, на которые разбивает плоскость прямая b (аксиома VI), и принадлежит либо полупрямой AB , либо AC .

Пусть точки E и D лежат на прямой a по одну сторону от точки A . Тогда точка A не лежит между точками E и D (определение «лежать по одну сторону»), а, значит, отрезок ED не содержит точку A (определение отрезка) и, следовательно, не пересекается с прямой b (лемма 1). Следовательно, точки E и D принадлежат одной полуплоскости относительно прямой b (либо полуплоскости точки B , либо C) (аксиома VI), а, значит, и одной полупрямой с начальной точкой A – AB или AC (теорема 13). Если точки E и D разделяются точкой A , то отрезок ED пересекает прямую b , следовательно, точки E и D лежат в разных полуплоскостях относительно прямой b , а, значит, принадлежат разным полупрямым с начальной точкой A . Теорема доказана.

Обратим внимание, что слово «разбивает» в формулировке теоремы имеет тот же смысл, что и в аксиоме VI⁷. Оно означает, что какова бы ни была точка A , лежащая на прямой a , существуют две полупрямые с начальной точкой A и состоящие из точек прямой a . При этом каждая точка прямой a , кроме A , принадлежит либо одной полупрямой, либо другой.

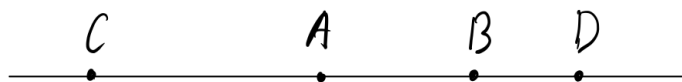
Из теоремы 15 следует, что *если на прямой AB точки B и C лежат по одну сторону от точки A , то полупрямые AB и AC совпадают* (являются одной и той же полупрямой, только по разному названной). Действительно, точки B и C не разделяются точкой A , а значит, принадлежат одной и той же полупрямой с начальной точкой A .

Упражнение 23. Точка B лежит на полупрямой AC , докажите, что отрезок AB является частью полупрямой AC , то есть любая точка отрезка AB принадлежит полупрямой AC .

Упражнение 24. Пусть на полупрямой AD отложены отрезки AB и AC . Докажите, что если $AC < AB$, то точка C лежит между точками A и B , если $AC > AB$, то точка B лежит между точками A и C .

Для полупрямых одной прямой с общей начальной точкой удобно ввести собственное название.

Определение. Полупрямые с общей начальной точкой и состоящие из точек одной прямой называются *дополнительными*.



На рисунке полупрямые AB и AC являются дополнительными, а полупрямые AB и AD совпадают. В качестве упражнения 25 укажите ещё пары совпадающих и дополнительных полупрямых с этого рисунка.

Из теоремы 15 следует, что у каждой полупрямой есть дополнительная полупрямая. В самом деле, по определению полупрямая является частью прямой, и начальная точка полупрямой разбивает эту прямую на две полупрямые. Вторая и является дополнительной к первой.

⁷ Вообще «разбиение» это математический термин, который означает, что мы представляем множество каких-либо объектов в виде непересекающихся подмножеств. Как видите тут сразу же появляется несколько непонятных слов, смысл которых раскрывается в ещё одной математической вселенной – теории множеств. Подробнее о ней будет сказано в пункте 11.

Упражнение 26. Пусть X – произвольная точка отрезка AB . Докажите, что отрезок AX является частью отрезка AB , то есть что любая точка отрезка AX является точкой отрезка AB .

Упражнение 27. Доказать, что если точки A и B лежат в одной полуплоскости относительно прямой a , то весь отрезок AB лежит в одной полуплоскости относительно прямой a .

Упражнение 28. Точки A , B , C и D лежат на одной прямой. Точка B лежит между A и C , точка C лежит между B и D . Доказать, что точка C лежит между A и D .

Упражнение 29. Точки B и D лежат на прямой AC между точками A и C , точка B лежит между A и D . Доказать, что точка D лежит между B и C .

Координаты. Существование дополнительных полупрямых позволяет сопоставить каждой точке прямой действительное число, называемое *координатой точки*. Перед началом этого сюжета напомним некоторые сведения из алгебры.

Определение. Пусть a – действительное число, тогда $-a$ это такое число, что $-a + a = 0$. Число $-a$ называется *противоположным a* .

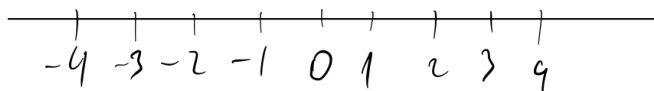
Например, если $a = 5$, то $-a = -5$, если $a = -5$, то $-a = 5$, если $a = 0$, то $-a = 0$.

Определение. Число, называемое *модулем числа a* (обозначается $|a|$), равно числу a , если a больше нуля, равно $-a$, если a меньше нуля, и равно нулю, если a равно нулю.

Например, по определению $|5| = 5$, но и $|-5| = 5$.

Вот теперь мы можем ввести координаты на прямой. Пусть O – некоторая точка прямой, будем считать её координату равной нулю. Точка O (которую ещё называют *началом координат*) разбивает прямую на две полупрямые, одну из которых мы будем называть «положительной», а другую «отрицательной»⁸. Если некоторая точка A принадлежит положительной полупрямой, то её координата равна длине отрезка OA , а если точка A принадлежит отрицательной полупрямой, то её координата есть отрицательное число, противоположное длине отрезка OA .

⁸ На рисунке положительную полупрямую традиционно изображают справа, а отрицательную слева, хотя в геометрии нет понятий «право» и «лево», так что можно было бы делать и наоборот. Для точного определения какая полупрямая «положительная» надо выбрать на прямой некоторую точку C , отличную от O . Тогда полупрямая точки C станет положительной, а дополнительная к ней полупрямая отрицательной.



При этом получается, что длина любого отрезка AB на прямой равна разности большей из координат концов AB и меньшей из координат концов AB . Либо, можно сказать, что длина AB равна модулю разности координат точек B и A . Например, если координата A равна 5, а координата B равна -6 , то длина $AB = |-6 - 5| = |-11| = 11$.

Перед доказательством этого утверждения заметим, что если a и b два числа, и $b > a$, то разность $b - a$ положительна. Тогда по определению модуля $|b - a| = b - a$. Если $a > b$, то разность $b - a$ отрицательна и $|b - a| = -(b - a) = -b + a = a - b$.

Теорема 16. Длина отрезка AB равна модулю разности координат точек B и A на прямой AB .

Доказательство. Будем обозначать координату точки A буквой a , а точки B буквой b . То есть требуется доказать, что $AB = |b - a|$. Рассмотрим все варианты расположения точек A и B относительно начала координат.

Если точка A принадлежит положительной полупрямой, а B отрицательной, то $a = OA$ и $b = -OB$, следовательно, длина $OA = a$, длина $OB = -b$. Точки A и B разделяются точкой O , значит, по аксиоме IV $AB = OA + OB = a + (-b) = a - b = |b - a|$.

Если точка A принадлежит отрицательной полупрямой, а точка B положительной, то $AB = OA + OB = -a + b = b - a = |b - a|$.

Если точки A и B принадлежат положительной полупрямой, то либо A лежит между O и B , либо B между O и A (точка O не лежит между A и B так как является начальной точкой полупрямой). Если точка B лежит между O и A , то по аксиоме IV $OA = OB + AB$, следовательно, $AB = OA - OB = a - b = |b - a|$. Если A лежит между B и O , то $AB = OB - OA = b - a = |b - a|$.

Если A и B принадлежат отрицательной полупрямой, и B лежит между O и A , то $AB = OA - OB = -a - (-b) = -a + b = b - a = |b - a|$. Если A лежит между O и B , то $AB = OB - OA = -b - (-a) = a - b = |b - a|$.

Если один из концов отрезка AB совпадает с началом координат, то утверждение теоремы следует непосредственно из определения координат. Теорема доказана.

Введение координат на прямой устанавливает взаимно однозначное соответствие между точками прямой и действительными числами. То есть каждому числу

соответствует одна точка на прямой, и каждой точке соответствует одно число. Действительно, какова бы ни была точка A прямой, существует отрезок OA определённой длины d (аксиома IV). Если точка A лежит на положительной полупрямой, то ей соответствует число d , если A на отрицательной полупрямой, то ей соответствует $-d$. Наоборот, каково бы ни было число d по аксиоме V можно отложить от точки O отрезок OA с длиной $|d|$ (если d отрицательное, то на отрицательной полупрямой, а если положительное, то на положительной) и получить соответствующую d точку A . Таким образом, мы поставили в соответствие каждой точке число, а каждому числу его точку.

Обратим внимание на разницу в терминологии. В учебниках алгебры отрезком $[a; b]$ называется числовой промежуток, который включает свои концы, то есть числа a и b в алгебре являются частью отрезка $[a; b]$. В геометрии, как мы помним, концы отрезка не считаются точками отрезка.

Упражнение 30. Докажите, что если $|a| = |b|$, то либо $a = b$ (если a и b одного знака), либо $a = -b$ (если a и b разных знаков).

Определение. Пусть a и b два числа. Число $\frac{a+b}{2}$ называется *полусуммой* a и b .

Упражнение 31. Пусть точка C – середина отрезка AB . Докажите, что координата точки C равна полусумме координат точек A и B .

Упражнение 32. Пусть C_1 – середина отрезка AB , а C_2 середина отрезка BD . Докажите, что $AD = 2C_1C_2$.

Упражнение 33. Пусть AB некоторый отрезок и координата a точки A меньше чем координата b точки B . Докажите, что если точка C принадлежит отрезку AB , то её координата c принадлежит числовому интервалу $(a; b)$. Обратно, если число c принадлежит интервалу $(a; b)$, то точка C с координатой c принадлежит отрезку AB .

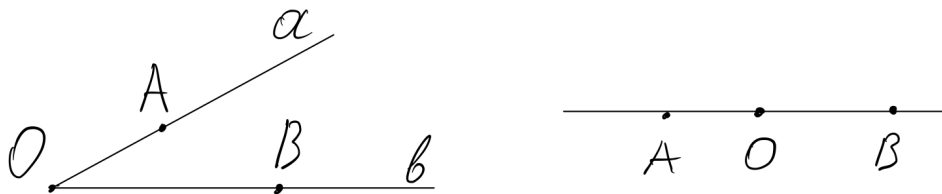
7. Угол

Пришла пора познакомиться с ещё одним персонажем нашей истории.

Определение. *Углом* называется фигура, которая состоит из двух различных полупрямых с общей начальной точкой. Эта точка называется *вершиной угла*, а полупрямые – *сторонами угла*.

Существование угла следует из существования пересекающихся прямых. Пусть прямые a и b пересекаются в точке O . Отметим на прямой a точку A , а на прямой b

точку B , получим две полупрямые OA и OB с общей начальной точкой. По определению они образуют угол AOB .



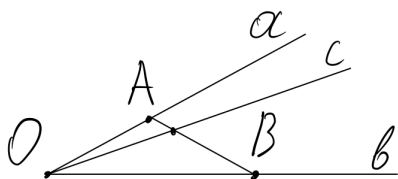
Однако ни что не мешает сторонам угла быть частями одной прямой. Это тоже соответствует определению угла. Для такого случая есть специальное название.

Определение. Если стороны угла являются дополнительными полупрямыми одной прямой, то угол называется *развёрнутым*.

Существование развёрнутых углов следует из существования дополнительных полупрямых.

Угол обозначается либо указанием его вершины ($\angle O$), либо указанием его сторон ($\angle ab$), либо указанием вершины и двух точек на сторонах угла ($\angle AOB$) – при этом вершина пишется посередине.

Теперь будем развивать теорию углов так же, как мы развивали теорию отрезков. Наша ближайшая цель – ввести меру для углов (то есть сопоставить им числа, как мы уже сделали это с отрезками), а для этого надо научиться разбивать углы на части, как это делает точка на отрезке.



Определение. Говорят, что луч c *проходит между* сторонами угла (ab) , если он исходит из вершины угла (ab) и пересекает какой-нибудь отрезок с концами на сторонах угла. В случае развёрнутого угла, считают, что любой луч, исходящий из его вершины, и отличающийся от его сторон, проходит между сторонами угла.

Теорема существования для луча c доказывается не сложно, так что попробуйте сделать это сами перед тем как читать дальше. Вообще рекомендую ко всей математической литературе относиться как к задачникам. Даже если в книге приведено доказательство теоремы, сначала стоит попытаться придумать его самостоятельно, а потом уже читать книжный вариант.

Теорема 17. Какой бы ни был угол (ab) , существует луч c , проходящий между сторонами (ab) .

Доказательство. Рассмотрим случай развёрнутого угла с вершиной O . Его стороны лежат на одной прямой, и через точку O можно провести какую-нибудь прямую b , пересекающую прямую развёрнутого угла. Точка O образует на прямой b два луча, оба из которых проходят между сторонами развёрнутого угла.

В случае неразвёрнутого угла отметим какую-нибудь точку A на стороне a и точку B на стороне b , тогда существует отрезок AB . Пусть C – некоторая точка отрезка AB , проведём через неё прямую OC . Луч OC проходит между сторонами угла (ab) так как пересекает отрезок AB с концами на сторонах угла (ab) . Теорема доказана.

Как видите, я не стал приводить ссылки на аксиомы и уже доказанные теоремы, которые обычно выделяются зелёным цветом. Это всё для того, чтобы вы могли сами вписать их в доказательство в качества упражнения.

Упражнение 34. Расставить в доказательстве теоремы 17 ссылки на используемые утверждения.

Вот теперь всё готово, чтобы сформулировать аксиому меры для углов.

Аксиома VII. Каждому углу принадлежит положительное действительное число, называемое градусной мерой. Развёрнутый угол равен 180° . Если луч c проходит между сторонами угла (ab) , то градусная мера угла (ab) равна сумме градусных мер углов (ac) и (bc) .

Аксиома VII вводит понятие *градусной меры*, аналогичное понятию длины для отрезков. Градусная мера это число, поставленное в соответствие углу. Но в отличии от ситуации с отрезками, у углов есть выделенное значение градусной меры, соответствующее развёрнутым углам – 180° . Знак $^\circ$ читается как «градусов» и означает, что некоторое число является градусной мерой угла.

Упражнение 35. Приведите пример, каковы должны быть градусные меры углов (ab) , (ac) и (bc) , чтобы луч c не мог проходить между сторонами угла (ab) .

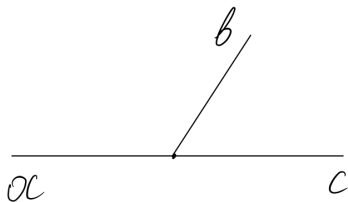
Теперь мы можем сравнивать углы с помощью их градусной меры.

Определение. Углы, не обязательно различные, называются *равными*, если равны их градусные меры. Из двух неравных углов *больше* тот у которого больше градусная мера, *меньше* тот у которого меньше градусная мера.

Свойства углов. Чтобы освоиться с новыми понятиями докажем две теоремы.

Теорема 18. Градусная мера любого неразвёрнутого угла меньше 180° .

Доказательство. Пусть (ab) данный неразвёрнутый угол, тогда полупрямая b не является дополнительной к a (**определение развёрнутого угла**).

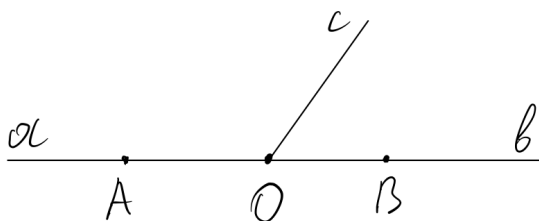


Обозначим c полупрямую дополнительную к a (мы доказали её существование в пункте 6). Тогда угол (ac) развёрнутый (**по определению**) и луч b проходит между его сторонами (**по определению**). Следовательно, по **аксиоме VII** для градусных мер углов выполняется равенство: $(ac) = (ab) + (bc)$. Из этого равенства по свойству положительных чисел следует, что $(ab) < (ac)$,

то есть градусная мера угла (ab) меньше градусной меры развёрнутого угла (ac) , равной 180° . Теорема доказана.

Сформулируем два важных следствия из теоремы 18. 1) *Любой неразвёрнутый угол меньше развёрнутого.* (Вспомните определение, когда один угол считается меньше другого). 2) *Если градусная мера угла равна 180° , то угол является развёрнутым.* Последнее утверждение является обратным к утверждению аксиомы, что градусная мера развёрнутого угла равна 180° .

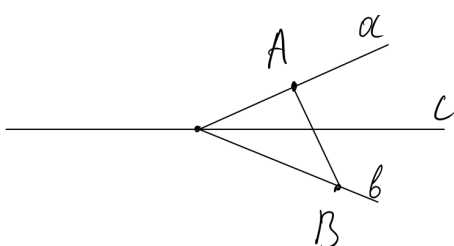
Теорема 19. Если луч c проходит между сторонами угла (ab) , то прямая, содержащая луч c , разделяет стороны угла, то есть полупрямые a и b лежат в разных полуплоскостях относительно прямой, содержащей луч c .



Доказательство. Сначала рассмотрим случай, когда угол (ab) развёрнутый. Тогда его стороны являются дополнительными полупрямыми, точки которых разделяются вершиной угла. В этом случае любой отрезок AB с концами на разных сторонах угла, содержит вершину угла. Луч c

исходит из вершины угла. Поэтому отрезок AB пересекается с прямой, содержащей луч c , в вершине угла. Следовательно, точки A и B лежат в разных полуплоскостях относительно прямой, содержащей луч c .

Пусть теперь угол (ab) неразвёрнутый. Так как луч c проходит между сторонами



угла (ab) , то он пересекает некоторый отрезок AB с концами на сторонах угла. Так как отрезок AB пересекается с прямой, содержащей луч c , то точки A и B лежат в разных полуплоскостях относительно этой прямой.

По **теореме 13** полупрямая a лежит в одной полуплоскости относительно прямой, содержащей луч c , именно в полуплоскости где лежит точка A . По той же теореме полупрямая b лежит в полуплоскости, которой принадлежит точка B . Так как точки A и B лежат в разных полуплоскостях относительно прямой, содержащей луч c , то и полупрямые a и b лежат в разных полуплоскостях и в случае развёрнутого, и в случае неразвёрнутого угла. Теорема доказана.

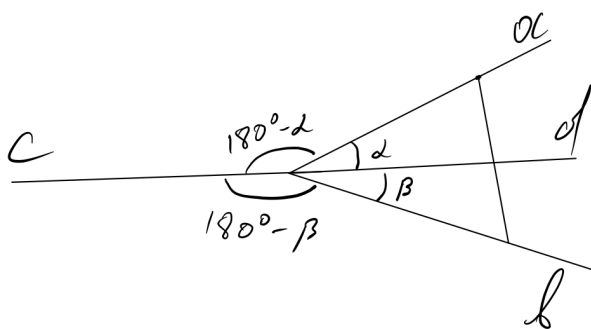
Упражнение 36. Добавьте в доказательство теоремы 19 ссылки на используемые утверждения.

Обратная теорема. Давайте снова поупражняемся в логике. Сначала сформулируем условие и заключение теоремы 19.

Условие P: луч c проходит между сторонами угла (ab) .

Заключение Q: стороны угла (ab) лежат в разных полуплоскостях относительно прямой, содержащей луч c .

Сформулируем обратную теорему в которой из Q следует P ($Q \Rightarrow P$). Пусть луч c исходит из вершины угла (ab) . Если прямая, содержащая луч c , разделяет стороны угла (ab) , то луч c проходит между сторонами угла. Верно ли это утверждение? Если посмотреть на рисунок ниже, становится очевидно, что нет. Обосновать же это логически достаточно сложно (но мы попробуем).



Будем рассуждать так. Пусть дан некоторый неразвёрнутый угол (ab) между сторонами которого проходит луч d . Тогда прямая, содержащая луч d , разделяет стороны угла (ab) (**теорема 19**).

Угол (ad) по **аксиоме VII** имеет некоторую градусную меру, которую мы обозначим α , угол (bd) тоже имеет некоторую градусную меру, которую обозначим β . Поскольку d проходит между сторонами угла (ab) , по той же аксиоме $(ab) = (ad) + (bd) = \alpha + \beta$.

Обозначим с полупрямую, дополнительную к d . Она исходит из вершины угла (ab) . Тогда угол (cd) развёрнутый и луч a проходит между его сторонами. Следовательно, $(ca) + (ad) = 180^\circ$, а значит, $(ca) = 180^\circ - \alpha$. С другой стороны полупрямая b тоже проходит между сторонами (cd) , значит, $(cb) + (bd) = 180^\circ$, и $(cb) = 180^\circ - \beta$.

Допустим теперь, что луч c проходит между сторонами угла (ab) (\neg). В этом случае по аксиоме $(ab) = (ca) + (cb) = (180^\circ - \alpha) + (180^\circ - \beta) = 360^\circ - (\alpha + \beta)$. Но как мы установили выше $(ab) = \alpha + \beta$. Это возможно только если $\alpha + \beta = 180^\circ$, то есть угол (ab) развёрнутый. Мы пришли к противоречию с условием, что угол (ab) не является развёрнутым \otimes . Следовательно, луч c , исходящий из вершины угла (ab) , не проходит между сторонами угла (ab) , не смотря на то что содержащая его прямая разделяет стороны a и b . Значит, утверждение, обратное к теореме 19 неверно.

Приведённое рассуждение называется *контрпример*. Мы сконструировали ситуацию, при которой теорема, обратная к теореме 19, не выполняется. Чтобы доказать какое-то утверждение, надо показать, что оно выполняется всегда, когда выполнены его условия. Чтобы опровергнуть достаточно привести один контрпример, показывающий, что в какой-то ситуации утверждение не выполняется, хотя его условия удовлетворены.

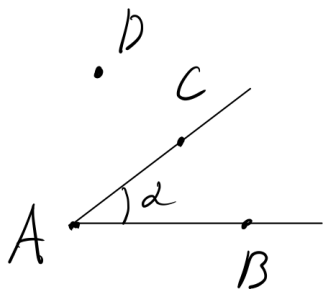
Упражнение 37. Докажите, что если луч c проходит между сторонами неразвёрнутого угла (ab) , то он пересекает любой отрезок с концами на сторонах угла (ab) .

Откладывание углов. Теперь нам осталось только ввести для углов аксиому откладывания, аналогичную аксиоме V для отрезков.

Аксиома VIII. Каково бы ни было положительное число α , меньшее 180 , от данной полупрямой в данную полуплоскость (относительно прямой, содержащей полупрямую) можно отложить и притом только один угол с градусной мерой α .

Градусные меры углов часто обозначают греческими буквами α (альфа), β (бета), γ (гамма), θ (тета), ϕ (фи) и т. д. Мы уже встречались с некоторыми из них, когда обозначали плоскости.

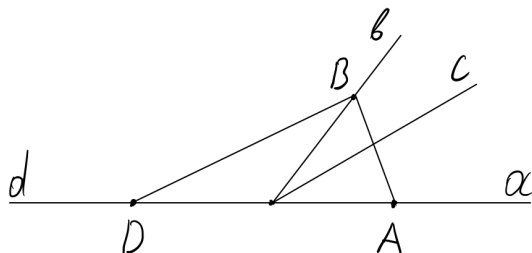
Снова обратим внимание на терминологию. Мы уже замечали, что традиционно геометры любят использовать слова, связанные с процессом черчения, но вкладывают в них несколько иной смысл. Пусть нам дана полупрямая AB и точка D ,



не лежащая на прямой AB , в полуплоскость которой мы хотим отложить угол. Слово «отложить» в формулировке аксиомы VIII означает не некий процесс рисования угла, а то что в мире геометрии *существует* угол CAB с градусной мерой α , такой что его луч AC лежит в полуплоскости точки D . Если в каком-то рассуждении мы говорим «отложим угол CAB », это означает, что он существует и мы вводим его в рассмотрение.

Теперь хорошо бы доказать для углов теорему, аналогичную теореме 4 для отрезков (что если от одной полупрямой в одну полуплоскость отложены два угла, один из которых меньше другого, то сторона меньшего будет проходить между сторонами большего), а после этого описать процедуру измерения углов. Но сначала придётся провести небольшую подготовительную работу.

Теорема 20. Если от полупрямой a отложить в одну полуплоскость углы (ab) и (ac) , то либо луч b проходит между сторонами угла (ac) , либо луч c проходит между сторонами угла (ab) .



Доказательство. Обозначим через d полупрямую, дополнительную к полупрямой a . Углы (db) и (dc) различны и отложены в одну полуплоскость, значит, они не равны (аксиома VIII). Следовательно, один из них меньше другого. Пусть, например, угол (db) меньше угла (dc) . Отметим на полупрямых a , b и d точки A , B , D . Тогда начальная точка лучей a , b и c лежит на отрезке AD (теорема 15).

Прямая, содержащая луч c , пересекает сторону AD треугольника DAB . Поэтому по теореме 11 она пересекает либо сторону DB , либо сторону AB . Точка пересечения лежит на луче c , потому что отрезки DB и AB лежат в полуплоскости точки B относительно прямой DA (теорема 14), а точка B лежит на луче b , который по условию лежит в одной полуплоскости с лучом c . Таким образом, луч c пересекает либо отрезок DB , либо отрезок AB .

Если бы луч c пересекал отрезок DB (\neg), то он проходил бы между сторонами угла (db) (по определению). Тогда по аксиоме VII $(dc) + (cb) = (db)$, а значит, $\angle(dc) < \angle(db)$, но мы рассматриваем случай, когда $\angle(db) < \angle(dc)$ (\otimes). Поэтому луч c не пересекает отрезок DB , а значит, пересекает отрезок AB . Но это и означает, что луч c проходит между сторонами угла (ab) (по определению).

В случае когда $\angle(dc) < \angle(db)$ ход доказательства аналогичен. Теорема доказана.

Мы уже замечали, что теорию углов мы развиваем по аналогии с теорией отрезков. Определение луча c , проходящего между сторонами угла (ab) , напоминает ситуацию с точками, когда одна из трёх лежит между двумя другими. Тогда теорема 20 для лучей является утверждением аналогичным аксиоме III для точек. При этом так же как три точки в аксиоме должны лежать на одной прямой, два

луча должны быть отложены в одну полуплоскость относительно третьего. Если мы уберём это требование, утверждение станет неверным. Действительно, построим контрпример к утверждению, что среди любых трёх лучей a , b и c , исходящих из одной точки, один всегда проходит между двумя другими.

Отложим от полупрямой a в разные полуплоскости углы (ab) и (ac) , равные 100° . Поскольку при этом лучи b и c лежат в разных полуплоскостях, они не совпадают. Допустим, что луч c проходит между сторонами угла (ab) , тогда по аксиоме VII для градусных мер углов выполняется равенство $(ac) + (bc) = (ab)$. Поскольку угол (ac) равен углу (ab) , указанное равенство выполняется, только если градусная мера угла (bc) равна нулю, что противоречит аксиоме VII. Аналогично доказывается, что луч b не проходит между сторонами угла (ac) . Допустим луч a проходит между сторонами (bc) . Тогда $(ab) + (ac) = (bc)$, следовательно, угол (bc) равен 200° , что противоречит теореме 18. Итак, среди трёх лучей a , b , c ни один не проходит между двумя другими.

Теперь мы можем достичь поставленной ранее цели, и доказать для углов теорему, аналогичную теореме 4 для отрезков.

Теорема 21. Если от полупрямой a отложить в одну полуплоскость углы (ab) и (ac) , такие, что угол (ac) меньше угла (ab) , то луч c будет проходить между сторонами угла (ab) .

Доказательство. По **теореме 20** либо луч b проходит между сторонами угла (ac) , либо луч c проходит между сторонами угла (ab) . Допустим, что луч b проходит между сторонами угла (ac) (\neg). Тогда $(ab) + (bc) = (ac)$, а значит, $\angle(ab) < \angle(ac)$, но по условию $\angle(ac) < \angle(ab)$ \otimes . Следовательно, луч c проходит между сторонами угла (ab) . Теорема доказана.

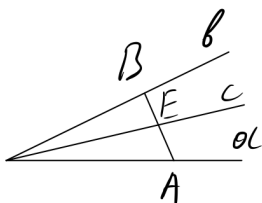
Биссектриса. Луч, который делит угол на два равных угла, представляет особый интерес.

Определение. Луч c , проходящий между сторонами угла (ab) , называется **биссектрисой** угла (ab) , если $(ac) = (bc)$.

Для доказательства существования и единственности биссектрисы любого угла, нам понадобится следующая лемма.

Лемма 3. Если луч c проходит между сторонами угла (ab) , то луч c лежит в одной полуплоскости с лучом b относительно прямой, содержащей луч a .

Доказательство. Луч b лежит в одной полуплоскости относительно прямой, содержащей луч a (**теорема 13**). То, что луч c проходит между сторонами угла (ab)



по определению означает, что луч c пересекает отрезок AB с концами на сторонах угла (ab) в некоторой точке E . Пусть точка B лежит на луче b . Тогда весь отрезок AB лежит в полуплоскости точки B (теорема 14), а значит, в полуплоскости луча b относительно прямой, содержащей луч a . Тогда и точка E лежит в этой полуплоскости, а, значит, в ней лежит и луч c ,

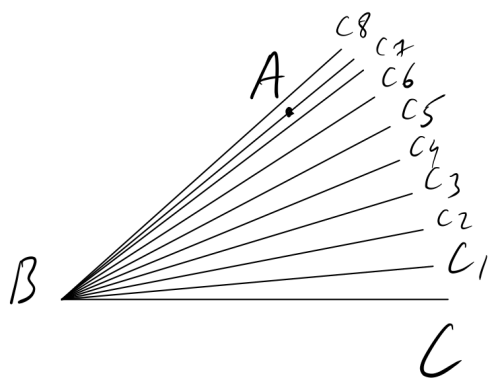
проходящий через точку E (теорема 13). Таким образом, луч c лежит в одной полуплоскости с лучом b . Лемма доказана.

Теорема 22. У любого угла есть единственная биссектриса.

Доказательство. Пусть (ab) данный угол. Отложим от полупрямой a в полуплоскость луча b угол (ac) , градусная мера которого равна половине градусной меры угла (ab) (аксиома VIII). Так как $\angle(ac) < \angle(ab)$, то по теореме 21 луч c проходит между сторонами угла (ab) . Тогда $(ab) = (ac) + (bc)$, следовательно, $(bc) = (ab) - (ac) = (ab) - \frac{(ab)}{2} = \frac{(ab)}{2} = (ac)$. Таким образом, луч c – биссектриса угла (ab) (по определению).

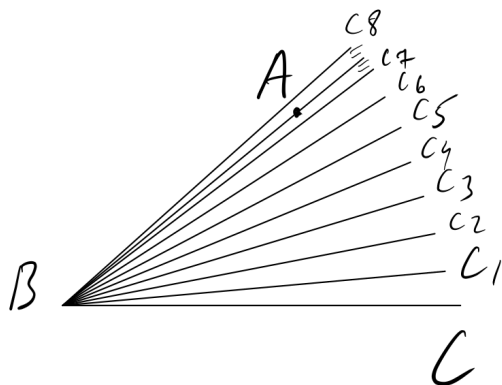
Докажем единственность биссектрисы. Допустим, что существует ещё один луч c_1 , являющийся биссектрисой угла (ab) (¬). Тогда по определению биссектрисы $(ac_1) = (bc_1)$, а по аксиоме VII $(ac_1) + (bc_1) = (ab)$. Из этого следует, что угол (ac_1) равен половине угла (ab) . Лучи b , c и c_1 лежат в одной полуплоскости относительно прямой, содержащей луч a (лемма 3), следовательно, углы (ac) и (ac_1) равны и отложены от полупрямой a в одну полуплоскость, что противоречит аксиоме VIII ⊗. Значит, луч c является единственной биссектрисой угла (ab) . Теорема доказана.

Измерение углов. Теперь можно описать процесс измерения углов с полной аналогией с измерением отрезков. Пусть дан некоторый угол ABC . Отложим от полупрямой BC в полуплоскость точки A углы C_1BC , равный 1° , C_2BC , равный 2° , C_3BC , равный 3° и так далее. Если какой-то из лучей BC_n совпадёт с лучом BA , то угол ABC совпадает с углом C_nBC и, следовательно, будет равен n градусам.



Если ни один луч не совпадёт с BA , то пока углы C_1BC , C_2BC и т. д., меньше угла ABC , по теореме 20 лучи BC_1 , BC_2 ... будут проходить между сторонами угла ABC . Но рано или поздно некоторый угол C_nBC окажется больше угла ABC , тогда луч BA будет проходить между лучами BC и BC_n (впрочем, это может быть и в случае самого первого луча BC_1 , если угол ABC меньше 1°). На рисунке луч BA оказался между 7-м и 8-м лучами, значит угол ABC больше 7° , но меньше 8° .

Дальше мы можем откладывать от луча BC углы с шагом $0,1$ градуса, то есть равные $7,1^\circ$, $7,2^\circ$, $7,3^\circ$ и так далее⁹. Если при этом какой-то из лучей, например, являющийся стороной угла, равного $7,8^\circ$ совпадёт с лучом BA , то мы получим градусную меру угла ABC . Если снова ни один из лучей не совпадёт с BA мы получим новое ограничение на градусную меру ABC , например больше $7,7^\circ$ и



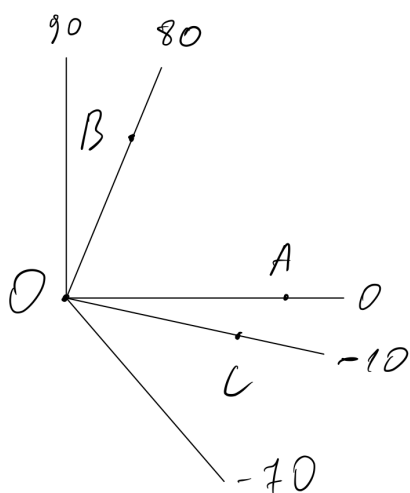
меньше $7,8^\circ$. Потом можно начать откладывать углы, увеличивающиеся на $0,01^\circ$ и найти меру угла ABC либо узнать ещё более точные ограничения для неё, например от $7,77^\circ$ и до $7,78^\circ$.

Этот процесс может не закончиться за конечное число шагов. То есть сколько бы мы не уменьшали наши шаги в 10 раз, ни один из лучей не совпадёт с BA . Это произойдёт, если угловая мера $\angle ABC$ является бесконечной десятичной дробью. В этом случае мы получим две последовательности чисел, ограничивающих угол ABC снизу и сверху. Обе последовательности будут приближаться к одной и той же бесконечной десятичной дроби, являющейся мерой угла ABC .

Как и измерение отрезков, измерение углов нужно не для того, чтобы поставить в соответствие некоторому углу некоторое число (это итак происходит по аксиоме VII), а для того, чтобы продемонстрировать, что градусная мера в геометрии является тем же самым, что мы понимаем под величиной угла в реальном мире. Обычно мы измеряем углы с помощью транспортира, благодаря которому можно узнать градусную меру с точностью до одного градуса. При этом процедура измерения аналогична описанной выше – мы разбиваем данный угол на углы с шагом 1° и смотрим куда попадает луч нашего угла. Таким образом мы можем работать с углами реальных предметов – деталей механизмов, участков земли, и любых окружающих нас объектов, по тем же правилам, которые действуют в геометрии. Геометрия оказывается скрыта в окружающем мире, везде где мы можем найти что-то похожее на угол, треугольник, отрезок или другую изучаемую в геометрии фигуру. Следовательно, мы можем применять наши знания в практических целях.

Продолжая аналогию углов и отрезков можно задуматься о том, чтобы ввести координаты лучей, так же, как мы определили координаты точек на прямой. Возьмём некоторую полупрямую OA и поставим ей в соответствие число 0. Прямая OA делит плоскость на две полуплоскости, одну из которых можно считать «положительной», а другую «отрицательной». Соответственно, если угол AOB

⁹ Традиционно углы делят не на 10 частей, а на 60, при этом $1/60$ часть угла называется минутой. Минуту в свою очередь делят на 60 секунд. Сути дела это не меняет, но такое деление не всегда бывает удобно.



отложен в положительную полуплоскость, то лучу OB соответствует положительное число, равное градусной мере угла AOB . Если другой угол AOC отложен в отрицательную полуплоскость, то лучу OC соответствует отрицательное число, равное градусной мере угла AOC , умноженной на -1 .

Проблемы начинаются, когда мы подходим к числу 180 . Во-первых, лучи соответствующие 180 и -180 будут совпадать. Во-вторых, не понятно, что делать дальше, то есть как задать соответствие лучей и чисел больше 180 и меньше -180 , ведь таких углов по теореме 18 не бывает.

Можно придумать некий «вращающийся луч», который поворачивается на угол больше 180° , но для этого нужно как-то определить, что называть поворотом луча. Такую теорию в принципе можно построить и она обычно излагается в разделе математики, называемом *тригонометрия*. По школьной программе тригонометрию изучают в 10 классе.

Следующее упражнение поможет ещё раз проанализировать пройденный материал.

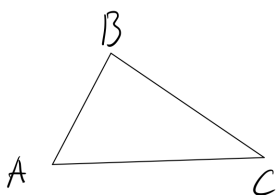
Упражнение 38. Составьте таблицу аналогичных понятий и утверждений из теории углов и теории отрезков. В левый столбец записывайте всё, что связано с углами, а в правый всё, что относится к отрезкам. Если какое-то понятие или утверждение (например, «развёрнутый угол») не имеет аналогии, то поставьте в соседнем столбце прочерк.

8. Равенство треугольников

В этом пункте мы изучим вопрос равенства треугольников. Не будет преувеличением сказать, что большинство геометрических задач сводится к исследованию равенства каких-нибудь треугольников, из которого узнаются длины или градусные меры искоемых отрезков и углов. Даже когда изучается более сложная фигура, чаще всего она разбивается на треугольники, с помощью которых и исследуются свойства этой фигуры.

Мы уже приводили определение треугольника в пункте 5, но чтобы вам не листать назад, дадим его здесь ещё раз.

Определение. Треугольником называется фигура, которая состоит из трёх точек, не лежащих на одной прямой, и трёх попарно соединяющих их отрезков. Эти точки называются *вершинами* треугольника, а отрезки – *сторонами*.



Треугольник обозначается указанием его вершин, например, $\triangle ABC$. Существование треугольника непосредственно следует из аксиом I и IV.

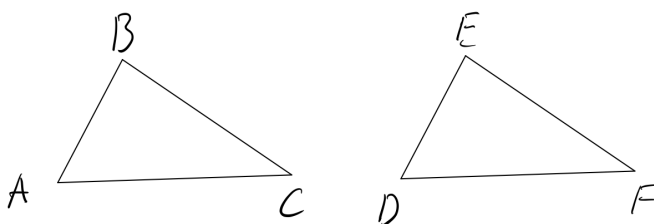
Определение. Углом треугольника ABC при вершине A называется угол, образованный лучами AB и AC . Углы при вершинах B и C определяются аналогично.

Для удобства речи можно сказать, что угол при вершине A это угол *между сторонами* AB и AC , угол при вершине B это угол между сторонами BC и BA , и так далее. Будем говорить, что угол при вершине треугольника *лежит против стороны*, для которой эта вершина не является концом. Например, угол при вершине A лежит против стороны BC , угол при вершине B лежит против стороны AC , угол при вершине C лежит против стороны AB . Можно сказать и наоборот, что сторона BC лежит против угла A и так далее.

Получается, что у треугольника есть шесть измеряемых (то есть имеющих меру) элементов – три угла и три стороны. С помощью равенства этих элементов можно определить равенство треугольников. Но перед этим нам понадобится ещё один термин: говорят, что величины a , b и c *соответственно равны* величинам d , e и f , если $a = d$, $b = e$, $c = f$.

Определение. Треугольники (не обязательно различные) называются *равными*, если три стороны одного треугольника соответственно равны трём сторонам другого, и углы треугольников, лежащие против равных сторон, тоже равны друг другу.

Например, если для треугольников ABC и DEF выполняются шесть равенств: $AB = DE$, $BC = EF$, $AC = DF$, $\angle C = \angle F$, $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$, то треугольники ABC и DEF равны.



Приравненные стороны (углы) также называют *соответствующими* (или просто *равными*) сторонами (углами).

С точки зрения определения не важно в каком порядке называть вершины треугольника. В нашем примере треугольник ABC всё равно равен треугольнику EFD или DFE , потому что равенство элементов этих треугольников никуда не делось. Однако для удобства принимают соглашение о записи равенства треугольников при котором вершины равных углов записываются в одинаковом порядке, то есть запись $\triangle ABC = \triangle DEF$ означает, что $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$, $\angle C = \angle F$, $AB = DE$, $BC = EF$, $AC = DF$, а запись $\triangle ABC = \triangle EFD$ означает уже, что $\angle A = \angle E$, $\angle B = \angle F$, $\angle C = \angle D$, $AB = EF$, $BC = FD$, $AC = ED$. Таким образом, запись равенства треугольников включает в себя информацию не только о том, что треугольники равны, но и о том какие элементы являются соответствующими.

Упражнение 39. В треугольниках FPL и MNK $FP = MN$, $PL = NK$, $FL = MK$, $\angle F = \angle K$, $\angle P = \angle M$, $\angle L = \angle N$. Можно ли из этого сделать вывод, что треугольники равны?

Для того, чтобы утверждать, что два треугольника равны, не обязательно доказывать шесть равенств. Следующая аксиома говорит о том, что достаточно трёх из них.

Аксиома IX (первый признак равенства треугольников). Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны.

Аксиома IX означает, что если у треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ $\angle A = \angle A_1$, $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, то треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны. То есть у них $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$, $BC = B_1C_1$. Почему этот признак работает? Обычно для объяснения этого факта приводят мысленный эксперимент. Переместим треугольник $A_1B_1C_1$ на плоскости так, чтобы его сторона A_1C_1 совместились с равной ей стороной AC треугольника ABC . Тогда луч A_1C_1 совпадёт с лучом AC , а поскольку угол $B_1A_1C_1$ равен углу BAC , то и луч A_1B_1 должен совпасть с лучом AB (ведь в одну полуплоскость можно отложить только один угол с данной градусной мерой). В тоже время $A_1B_1 = AB$, значит точка B_1 совпадёт с точкой B (потому что на полупрямой можно отложить только один отрезок данной длины), и, в итоге, треугольник $A_1B_1C_1$ полностью совпадёт с треугольником ABC , что и означает их равенство. Правда может оказаться, что после совмещения сторон A_1C_1 и AC вершины B_1 и B окажутся в разных полуплоскостях, тогда ещё нужно перевернуть треугольник $A_1B_1C_1$ относительно прямой AC .

Приведённое рассуждение наглядно, но не является доказательством. Это так называемое *правдоподобное рассуждение*, которое иногда помогает выдвинуть

удачную гипотезу или нащупать правильный путь к решению задачи. Почему его нельзя считать доказательством? Потому что мы не определяли таких операций, как перемещение треугольника на плоскости и тем более его «переворот» относительно прямой. В наших аксиомах ничего об этом не сказано, а значит, не ясно, что вообще это означает. На самом деле эти операции можно точно определить и ввести понятие движения фигуры (что и делается в учебнике геометрии за 8 класс), но для этого придётся развить достаточно сложную теорию, которая сама будет опираться на понятие равенства треугольников и первый признак равенства треугольников в том виде, как мы их сформулировали. Для того, чтобы определить равенство треугольников с помощью движения и через него доказать первый признак равенства, понадобилась бы другая система аксиом.

Приведём примеры использования аксиомы IX в виде упражнений.

Упражнение 40. В треугольниках ABC и AB_1C $AB = AB_1$ и $\angle BAC = \angle B_1AC$. Доказать, что $BC = B_1C$.

Упражнение 41. Точка E лежит на прямой AB между точками A и B . Точка C лежит на прямой BD между точками B и D . $AB = 5$, $AC = 7$, $BC = 3$, $AE = 2$, $CD = 2$. Найти длину ED .

Следующий пример использования аксиомы IX уже не так очевиден.

Пример. В треугольнике ABC сторона AC равна стороне BC . Доказать, что тогда угол A равен углу B .

В упражнении 40 у равных треугольников была общая сторона, а в упражнении 41 общий угол. А могут ли два треугольника из аксиомы IX совпадать целиком? В определении сказано, что равные треугольники не обязательно должны быть различными, значит тоже самое подразумевается и в аксиоме.

По условию $AC = BC$, тогда и $BC = AC$, и $\angle C = \angle C$ (любой угол равен самому себе, потому что его градусная мера одна и та же). В этих равенствах мы считаем, что слева стоят элементы треугольника ABC , а справа соответствующие им элементы треугольника BAC (мы поменяли порядок вершин, чтобы показать какие элементы у нас приравниваются). Значит выполняются все три условия первого признака равенства для треугольников ABC и BAC , и следовательно, эти треугольники равны. Из полученного равенства треугольников по определению следует, что напротив соответствующих сторон лежат равные углы. Напротив стороны BC в треугольнике ABC лежит угол A , а напротив стороны AC в треугольнике BAC – угол

B , значит, из равенства $BC = AC$ следует, что $\angle A = \angle B$. Да, иногда можно использовать логику неожиданным образом¹⁰.

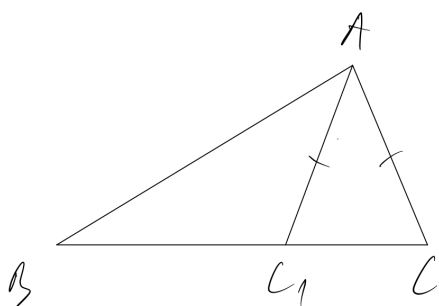
Возможно у читателя возникнет соблазн доказать, что в любом треугольнике два угла равны друг другу, ведь каждый треугольник равен самому себе. Покажем, что такое доказательство не получается. Пусть $AC = AC$, $BC = BC$ и $\angle C = \angle C$, из этого следует что треугольник ABC равен треугольнику ABC , а значит, напротив равных сторон $AC = AC$ лежат равные углы $\angle B = \angle B$, а напротив равных сторон $BC = BC$ лежат равные углы $\angle A = \angle A$. Но всё это было очевидно с самого начала. Чтобы доказать, что $\angle A = \angle B$ нужно иметь возможность поставить в соответствие друг другу две разные стороны, как в примере выше ($BC = AC$), что в обычном треугольнике невозможно.

Почему угол должен быть между сторонами. Обсудим аксиому IX подробнее.

Коротко первый признак равенства треугольников звучит так: «треугольники равны по двум сторонам и углу между ними». Равенство двух сторон и угла между ними у двух треугольников означает, что другие элементы (два угла и сторона) этих треугольников тоже равны. Важно, чтобы угол был именно тем, который образуют равные стороны. Если у треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ $\angle B = \angle B_1$, $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, то аксиома IX к треугольникам ABC и $A_1B_1C_1$ уже не применима. Но что если они всё же равны в этом случае? Выдвинем следующее утверждение в качестве гипотезы: *если две стороны и угол, лежащий против одной из этих сторон, одного треугольника, равны двум сторонам и углу против соответствующей стороны другого треугольника, то такие треугольники равны.*

Будем рассуждать так. Пусть A – произвольный, но неразвёрнутый угол. Отложим на его сторонах равные отрезки AC и AC_1 . На полупрямой CC_1 отложим отрезок CB , больший отрезка CC_1 . Тогда по теореме 4 точка C_1 лежит между точками C и B ,

значит, точки C_1 и C лежат по одну сторону от точки B и полупрямые BC_1 и BC совпадают. Следовательно, угол ABC и ABC_1 это один и тот же угол.



Поскольку угол A неразвёрнутый, точка A не лежит на прямой CC_1 , на которой лежит точка B , следовательно, существуют треугольники ABC и ABC_1 . В них $AC = AC_1$, потому что мы так их

¹⁰ Ради интереса приведём ещё одно решение задачи из примера, которое не требует доказательства равенства одного и того же треугольника. По теореме 22 у угла C треугольника ABC существует биссектриса, а по утверждению из упражнения 37 эта биссектриса пересекает сторону AB треугольника в некоторой точке D . Тогда треугольники CBD и CAD равны по первому признаку равенства, а значит, в них угол B равен углу A .

построили, $AB = AB$, $\angle ABC = \angle ABC_1$. То есть выполняются все условия нашей гипотезы – в треугольниках равны две стороны и углы, лежащие против соответствующих сторон AC и AC_1 . Тогда, если гипотеза верна, то треугольники ABC и ABC_1 равны, а значит, по определению равных треугольников $BC = BC_1$. Так как BC и BC_1 это одна и та же полупрямая, получается, что на ней отложены два разных отрезка с одной и той же длиной (точки C и C_1 не совпадают так как лежат на разных сторонах угла), что противоречит аксиоме V \otimes . Мы пришли к противоречию и, значит, наша гипотеза неверна.

Напомню, что рассуждение выше называется контрпример. Любопытный исследователь мог бы задуматься – а нельзя построить какой-нибудь контрпример и к аксиоме IX? Это было бы очень забавно, потому что получалось бы, что первый признак равенства треугольников противоречит каким-то другим уже доказанным утверждениям. В этом случае аксиоматика, содержащая аксиому IX, являлась бы противоречивой, а значит, мир геометрии с такой аксиомой не мог бы существовать. В принципе, если бы мы в каком-то рассуждении смогли бы придумать контрпример к уже доказанной теореме или принятой нами аксиоме, это бы означало противоречивость всей аксиоматики. Возможно ли такое? Геометрия существует уже несколько тысяч лет и пока подобного противоречия не обнаружилось. Более того, можно доказать, что геометрия непротиворечива, если непротиворечивы свойства действительных чисел (то есть арифметика), которые она использует в качестве меры для отрезков и углов (это доказательство требует знаний высшей математики и его можно найти, например, в книге [2]). Поскольку противоречий в арифметике не обнаружено, то и в геометрии их не существует. А это значит, что создаваемый нами мир геометрии логически возможен.

Это просто игра с аксиомами. Возможно читателю не даёт покоя, что в качестве аксиомы выбран первый признак равенства треугольников. Ведь в школьном учебнике [1] вместо него приведена другая аксиома, которая интуитивно менее очевидна и понятна, чем наша: «Каков бы ни был треугольник, существует равный ему треугольник в заданном расположении относительно данной полупрямой». Это ещё один пример взаимозаменяемости аксиом, с которым мы уже сталкивались в случае аксиомы VI и теоремы 11. В учебнике через аксиому существования равного треугольника доказывается первый признак равенства треугольников. Можно сделать наоборот, и доказать утверждение из учебника с помощью аксиомы IX. Предлагаю сделать это в качестве упражнения.

Упражнение 42. Пусть ABC данный треугольник. Докажите, что для любого луча a с начальной точкой A_1 и точки M , не лежащей на прямой, содержащей луч a , существует треугольник $A_1B_1C_1$, равный треугольнику ABC , такой что точка B_1 лежит на луче a , а точка C_1 лежит в полуплоскости точки M .

Упражнение 43. Докажите первый признак равенства треугольника, приняв вместо него за аксиому, что каков бы ни был треугольник, существует равный ему треугольник в заданном расположении относительно данной полупрямой.

С точки зрения дальнейшего построения геометрии замена аксиомы IX на аксиому существования равного треугольника не имеет преимуществ потому что зная первый признак равенства треугольников можно доказать известные второй и третий признаки равенства без утверждения о существовании равного треугольника в данной полуплоскости, так что оно не понадобится нам даже в качестве теоремы. Такое доказательство признаков равенства приведено, например, в [3].

Есть и хорошая новость для любителей логического минимализма. Аксиому IX можно принять в более слабой формулировке.

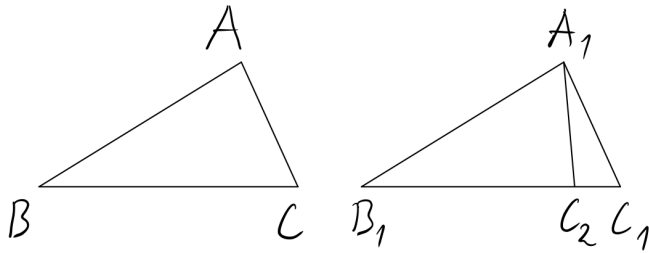
Аксиома IX*. Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то и два других угла этих треугольников соответственно равны.

«Слабая формулировка» математического утверждения означает, что в нём содержится меньше информации по-сравнению с «сильной». Создавая аксиоматику математики любят принимать аксиомы в наиболее слабых формулировках, чтобы в них не входило ничего, что можно доказать. В отличие от аксиомы IX в аксиоме IX* утверждается только равенство углов, а про третью сторону ничего не говорится. То есть если у треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ $\angle A = \angle A_1$, $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, то у них $\angle C = \angle C_1$, $\angle B = \angle B_1$ (как обычно, соответствующими считаются углы, лежащие против приравненных сторон), а вот про равенство $BC = B_1C_1$ нам теперь не известно. В этом варианте изложения первый признак равенства треугольников требуется доказать. Покажем как это сделать.

Первый признак равенства треугольников. Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны.

Доказательство. Пусть у треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ $\angle A = \angle A_1$, $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$. Тогда по аксиоме IX* $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$. Докажем, что и $BC = B_1C_1$.

Допустим сторона BC не равна B_1C_1 (\neg). Отложим на полупрямой B_1C_1 отрезок B_1C_2 , равный BC . При этом точка C_2 может оказаться как между точками B_1 и C_1 , так и на продолжении отрезка B_1C_1 . Рассмотрим треугольники ABC и $A_1B_1C_2$. В них $AB = A_1B_1$ по условию, $BC = B_1C_2$ по построению, $\angle B = \angle B_1$ по доказанному. Тогда снова



используя аксиому IX* получаем, что $\angle A = \angle B_1A_1C_2$. При этом по условию $\angle A = \angle B_1A_1C_1$. Значит, $\angle B_1A_1C_2 = \angle B_1A_1C_1$.

Точка C_2 лежит на луче B_1C_1 , следовательно, по теореме 13 точки C_2 и C_1 лежат в одной полуплоскости

относительно прямой A_1B_1 . Тогда по этой же теореме и лучи A_1C_2 и A_1C_1 лежат в одной полуплоскости относительно A_1B_1 . Поскольку мы доказали, что углы $B_1A_1C_2$ и $B_1A_1C_1$ равны, получается, что в одну полуплоскость относительно полупрямой A_1B_1 отложены два равных угла, что противоречит аксиоме VIII ⊗. Следовательно, $BC = B_1C_1$ и треугольник ABC равен треугольнику $A_1B_1C_1$. Первый признак равенства треугольников доказан.

Замена аксиомы IX на IX* удлинит изложение, но не даёт никаких преимуществ. Так что если мы не ставим своей целью выяснить минимальные основания геометрии (о которых подробнее рассказано в пункте 12), то в такой замене нет смысла.

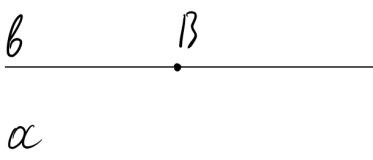
9. Параллельные прямые

Проделав долгий путь по миру геометрии мы возвращаемся к самому началу. В пункте 2, сразу после введения первых аксиом, мы обнаружили, что прямые пересекаются друг с другом. При этом мы обошли стороной другой случай, когда две прямые не имеют точек пересечения.

Определение. Две прямые на плоскости называются *параллельными*, если они не пересекаются.

Для обозначения параллельности прямых a и b часто используется запись $a \parallel b$. Основным факт о параллельных прямых сообщает последняя в нашем списке аксиома.

Аксиома X. Через точку, не лежащую на данной прямой, на плоскости может проходить не более одной прямой, параллельной данной.

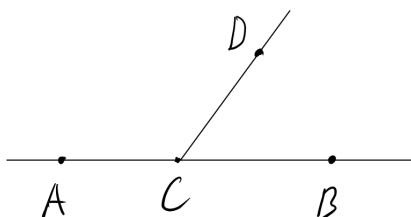


Заметим, что в аксиоме не сказано, что через данную точку проходит хоть одна прямая, параллельная данной. Суть в ограничении – если через точку, не лежащую на данной прямой, и может

проходить параллельная прямая, то только одна. Так что вопрос о существовании параллельных прямых всё ещё остаётся открытым. Что если все прямые в геометрии пересекаются друг с другом?

Сейчас, когда мы уже узнали много фактов об углах и прямых, можно исследовать существование параллельных. Для начала нам понадобятся смежные углы.

Пусть C – точка на прямой AB , лежащая между точками A и B , а D – точка не лежащая на прямой AB . Построим луч CD и получим два угла ACD и BCD у которых сторона CD общая, а две другие стороны CA и CB являются дополнительными полупрямыми, так как точки A и B этих полупрямых разделяются начальной точкой C .



Определение. Два угла называются *смежными*, если у них одна сторона общая, а другие стороны этих углов являются дополнительными

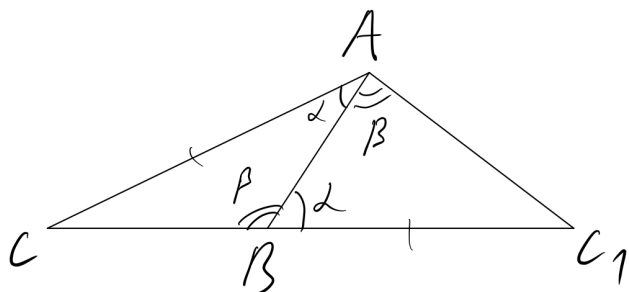
полупрямыми.

Теорема 23. Сумма смежных углов равна 180° .

Доказательство. Пусть ACD и BCD данные смежные углы. Так как CA и CB дополнительные полупрямые, они образуют развёрнутый угол. Луч CD проходит между сторонами этого развёрнутого угла (**по определению**). Тогда по **аксиоме VII** сумма углов ACD и BCD равна 180° . Теорема доказана.

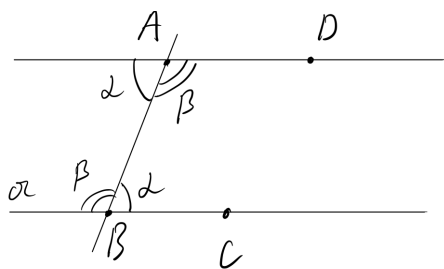
Из теоремы 23 следует, что если мы знаем градусную меру одного из смежных углов, например α , то второй будет равен $180^\circ - \alpha$.

Лемма 4. Сумма любых двух углов треугольника не равна 180° .



Доказательство. Пусть ABC данный треугольник. Допустим, что сумма его углов при вершинах A и B равна 180° (\neg). Обозначим α градусную меру угла BAC и β градусную меру угла ABC . Таким образом, $\alpha + \beta = 180^\circ$. Отложим на полупрямой дополнительной к BC отрезок BC_1 , равный AC . Углы ABC и

ABC_1 являются смежными, значит, $\angle ABC_1 = 180^\circ - \beta = \alpha$. В треугольниках ABC и BAC_1 $AC = BC_1$, $AB = BA$, $\angle BAC = \angle ABC_1$, следовательно, **по аксиоме IX** $\triangle ABC = \triangle BAC_1$. **По определению** равных треугольников, их углы, лежащие против равных сторон, равны. Значит, $\angle BAC_1 = \angle ABC = \beta$.



Точки C и C_1 лежат на дополнительных полупрямых и, следовательно, разделяются точкой B (теорема 15). Тогда по определению отрезка точка B принадлежит отрезку CC_1 . Луч AB пересекает отрезок CC_1 в точке B , значит, он проходит между сторонами угла CAC_1 (по определению). Тогда по аксиоме VII $\angle CAC_1 = \angle CAB$

+ $\angle BAC_1 = \alpha + \beta = 180^\circ$. Следовательно, угол CAC_1 является развёрнутым (следствие из теоремы 18). По определению развёрнутого угла полупрямые AC и AC_1 являются дополнительными, то есть состоят из точек одной прямой. Таким образом точка C_1 принадлежит прямой AC . Прямая AC не совпадает с прямой BC , потому что точка A не лежит на прямой BC по определению треугольника ABC . Получается, что две различные прямые AC и BC пересекаются в двух точках C и C_1 , что противоречит теореме 2 ⊗. Значит, сумма углов A и B не равна 180° . Лемма доказана.

Теперь всё готово для доказательства существования параллельных прямых.

Теорема 24. Через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести прямую, параллельную данной.

Доказательство. Пусть a – данная прямая, и A – точка не лежащая на прямой a . Отметим на прямой a две точки B и C , и проведём прямую AB (аксиомы I и II). Отложим от полупрямой AB в полуплоскости точки C угол BAD с градусной мерой, равной $180^\circ - \angle ABC$ (аксиома VIII). Мы утверждаем, что прямые BC и AD параллельны.

Обозначим α градусную меру угла ABC , и β градусную меру угла BAD . Тогда $\beta = 180^\circ - \alpha$. Заметим, что угол смежный с углом ABC равен $180^\circ - \alpha$, то есть равен β , а угол смежный с углом BAD равен $180^\circ - \beta = \alpha$ (теорема 23).

Допустим, что прямые BC и AD пересекаются в некоторой точке E (¬). Точка E точно не лежит на прямой AB , потому что у прямых AB и BC не может быть двух общих точек (теорема 2). Значит, точка E лежит либо на полупрямых AD и BC , либо на дополнительных к ним, в зависимости от того в какой полуплоскости относительно прямой AB она оказалась. Тогда существует треугольник AEB , у которого сумма углов EAB и EBA равна $\alpha + \beta = 180^\circ$, не зависимо от того в какой полуплоскости относительно AB лежит точка E . А это противоречит лемме 4 ⊗. Следовательно, прямые BC и AD не могут пересекаться, то есть являются параллельными. Теорема доказана.

Из теоремы 24 и аксиомы X следует, что *через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести и притом только одну прямую, параллельную данной*.

Упражнение 44. Пусть прямая a параллельна прямой b . Докажите, что все точки прямой a лежат в одной полуплоскости относительно прямой b .

Упражнение 45. Пусть прямые a и b пересекаются в точке A . Точка E не принадлежит прямым a и b . Докажите, что через точку E можно провести прямую, не проходящую через точку A и пересекающую прямые a и b .

10. Краткие итоги

Итак, наш путь подходит к концу. Мы неплохо потрудились, открыв целую вселенную, наполненную геометрическими фигурами. В самом начале книги мы сформулировали задачу «загрузить» геометрию как компьютер загружает операционную систему. Мы хотели показать, как геометрия возникает «из ничего» и развивается с помощью воображения и логики. Введённые нами тринадцать аксиом (включая три пространственные) и доказанные с помощью них теоремы решают эту задачу. Они закладывают фундамент на котором можно построить весь школьный курс геометрии с полными обоснованиями каждого факта. Для читателей, которым интересно ознакомиться с таким курсом, я рекомендую книгу [3]. Её можно читать сразу с третьего параграфа, потому что содержание первых двух покрывается уже изложенным нами материалом. Правда надо быть готовым к тому, что доказательства в [3] уже не столь подробны как были у нас, так что многие логические пробелы читателю придётся додумывать самостоятельно. Это не так сложно сделать, если хорошо владеть аксиомами и полученными следствиями из них. Поскольку книга [3] давно не переиздавалась и, к тому же, изложение в ней содержит пробелы, вы можете воспользоваться конспектом содержания как нашей книги, так и [3] в котором приведены доказательства со всеми необходимыми объяснениями. Ссылка на него есть в списке литературы.

Чтобы ещё раз повторить весь пройденный материал, предлагаю сделать следующее заключительное упражнение.

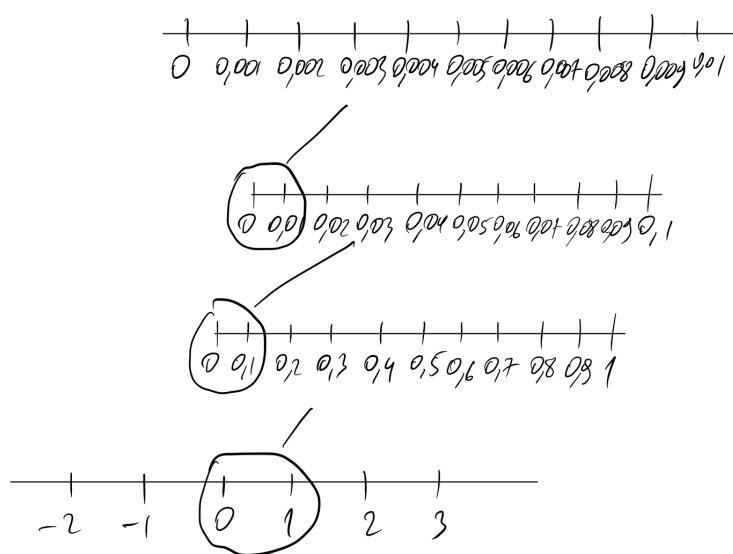
Упражнение 46. Ещё раз прочитайте все аксиомы и определения из каждого пункта книги. Выпишите впервые встретившиеся в каждом пункте понятия по следующей схеме. 1) Объекты. Например, точка, отрезок, длина и т.п. 2) Отношения между объектами. Например, принадлежать, лежать между, иметь длину. 3) Названия фигур, состоящих в определённом отношении с другими фигурами (для краткости будем называть их «ролями фигуры»). Например, конец отрезка, сторона треугольника. Отметьте какие понятия в аксиоматике являются *основными*, то есть не имеют определения и задаются только аксиомами

11. Так про что была эта книга?

Всю книгу мы изучали геометрические фигуры, но начали мы с того, что в первом пункте затруднились дать определение этого понятия. Тогда мы предложили считать, что фигура это просто любой персонаж воображаемого мира геометрии. Можно ли теперь сказать о фигурах что-то более конкретное?

Основными геометрическими фигурами в нашей аксиоматике являются точка, прямая и плоскость. Мы представляли их различными сущностями, имеющими отношения (например, отношение принадлежности) друг с другом. При этом природа этих сущностей не известна, в аксиомах не сказано ничего о том, что такое прямая или точка, а говорится только об их свойствах и отношениях.

Создававшие геометрию древние греки тоже считали точку, прямую и плоскость самостоятельными фигурами. Однако со временем во взглядах на эти понятия произошли изменения, и вот почему: введя аксиому V мы увидели, что и прямая и плоскость полны точек. Причём точек этих чрезвычайно много. Настолько, что между любыми двумя найдётся еще бесконечное количество точек. Можно, например, разделить данный отрезок на 10 частей, и каждую его часть ещё на



десять частей, и каждую из полученных частей снова на 10 частей, и на каждой из них всё равно будет сколько угодно точек. Это напоминает масштабирование на экране смартфона: чем большим мы делаем увеличение изображения, тем больше деталей видим. Только с прямой его можно делать бесконечно долго. При этом точки никогда не исчерпаются и мы не «дойдём до дна». Отсюда следует логичный вывод, что вся прямая состоит из точек. На самом деле

мы пользовались этой идеей уже в определениях отрезка, полупрямой и полуплоскости, которые определены как части прямой (плоскости), состоящие из некоторых точек. Но если часть прямой состоит из точек, то логично считать, что и вся прямая тоже. То же самое можно сказать и про плоскость, и про любую другую фигуру. В мире геометрии нет ничего, кроме точек в их различных сочетаниях. Поэтому говорят, что *любая геометрическая фигура это множество точек*.

Идея множеств появилась в математике в XIX веке. Тогда была создана *теория множеств*, в которой само множество (некоторый набор предметов) является неопределяемым понятием. Принадлежащие множеству объекты называются *элементами* множества. Свойства множеств задаются специальной аксиоматикой. После этого и действительные числа, и геометрию, и другие математические теории стали рассматривать на фундаменте теории множеств. Каждая теория имеет своё основное множество, изучением которого она занимается. Например, для планиметрии это плоскость, для стереометрии – пространство. И то и другое является множеством точек. На уроках алгебры в школе работают с множеством действительных чисел, частями, или как говорят, *подмножествами* которого являются рациональные, целые и натуральные числа. Действительным числам, кстати, тоже нужна своя аксиоматика, но её обычно формулируют только в начале изучения высшей математики.

На первый взгляд мы выиграли немного. Только заменили неопределённое слово «фигура» на такое же не имеющее определения слово «множество». Но с другой стороны мы теперь можем привести наши термины в некоторую систему. Например, что такое точка? Это элемент множества плоскости (или пространства). Что такое прямая? Это подмножество плоскости (или пространства), для которого выполняются аксиомы I-X и C_1 - C_3 . Что такое плоскость? Это подмножество пространства для которого выполняются аксиомы C_1 - C_3 .

Кроме того, мысля плоскости как множества точек, мы можем упростить аксиоматику геометрии. Например, можно доказать, что если две плоскости содержат пересекающиеся прямые a и b , то все точки этих плоскостей совпадают. Следовательно, включение в аксиому C_3 утверждения о единственности плоскости, проходящей через пересекающиеся прямые, не требуется¹¹. Если же мы считаем плоскость чем-то иным, нежели совокупностью точек, то совпадение их точек ещё не означает совпадение плоскостей. Этот факт приходится включать в аксиому.

На самом деле идея представлять себе геометрические фигуры как множества точек оказалась плодотворной. Благодаря этому в высших разделах геометрии были доказаны многие теоремы, истинность которых нельзя установить без использования теории множеств. Последовательное изложение геометрии на основе множеств можно найти в книгах [4, 5].

¹¹ К сведению читателей приведём это доказательство. Пусть α и β две плоскости, обе проведённые через пересекающиеся прямые a и b . Пусть C произвольная точка плоскости α . Тогда через неё в плоскости α можно провести прямую, пересекающую прямые a и b в двух разных точках (см. упражнение 45). Эти две точки принадлежат плоскости β (так как прямые a и b лежат в плоскости β), а значит и проведённая прямая, проходящая через точку C , принадлежит плоскости β . Таким образом, точка C принадлежит плоскости β . Взяв произвольную точку D в плоскости β аналогично доказываем, что любая точка из β принадлежит α . Следовательно, если мы считаем плоскость множеством точек, то плоскости α и β совпадают.

Однако теория множеств не сильно помогает разобраться с природой основных фигур геометрии. Мы представляем их себе в виде визуальных образов точки, прямой и плоскости, с которых и началась эта книга. Однако если внимательно прочитать весь текст аксиом, определений, теорем и доказательств, то окажется, что в своих рассуждениях мы не опирались на рисунки, а развивали геометрию строго логически. Это было изначально оговорено правилами игры в создание мира геометрии. Таким образом, нам было не важно какой смысл имеют слова «точка», «прямая» или «принадлежать». Получается, что они могут иметь любой смысл, лишь бы выполнялись аксиомы!

Интересно, но звучит слишком теоретически. А что точку можно представить чем-то иным, кроме малюсенького кружка на бумаге? Прямую можно представить как-то иначе, нежели ровная бесконечная линия? Оказывается, что да.

Например, точкой на плоскости можно считать пару действительных чисел, взятых в определённом порядке $(x; y)$. Сами эти числа называются *координатами* точки. Прямой называется множество точек, координаты которых удовлетворяются уравнению $ax + by + c = 0$, в котором числа a , b и c называются *коэффициентами*. Коэффициенты прямой можно узнать если известны две какие-нибудь точки, принадлежащие прямой (что соответствует аксиоме II). При этом смысл отношения принадлежности точки прямой в том, что координаты точки удовлетворяют уравнению прямой (то есть при их подстановке в уравнение получается верное равенство). Можно доказать, что для таких точек (упорядоченных пар чисел), и таких прямых, заданных уравнением, выполняются все аксиомы планиметрии I-X. Правда доказательство довольно длинно и требует некоторых элементов высшей математики. Его можно найти в [2]. Зато при таком понимании точек и прямых геометрию становится возможным исследовать чисто алгебраическими методами, отказавшись от какой-либо визуализации прямых и точек с помощью рисунков. Открытие данного факта принадлежит философу Рене Декарту (1596 – 1650).

Построение теории, оперирующей неопределяемыми (основными) понятиями, отношения между которыми задаются аксиомами, называется *аксиоматическим методом*. Сущность его как раз в том, что основные понятия лишены конкретного содержания, это термины-пустышки¹². Придавая им определённый смысл, например, считая точку парой чисел, или считая её рисунком некоторого вида, мы получаем конкретную *модель* (реализацию) данной теории. Кстати, с примером такой модели мы уже встречались в пункте 4, где было указано, что аксиомы I, II, III, IV, VI и VII выполняются на модели плоскости в виде круга с прямыми, заканчивающимися на границе этого круга. Такие модели используют в частности

¹² На первый взгляд, факт, что рассуждая не понятно о чём, можно прийти к массе разных выводов, несколько обескураживает, но, как мы видели на протяжении всей книги, «рассуждения ни о чём» не так уж трудны.

для того, чтобы выяснить *независимость* одних аксиом от других. Независимость аксиомы означает, что её нельзя доказать с помощью других аксиом. Например, то что на плоскости-круге не выполняется аксиома V, означает, что её невозможно доказать через аксиомы I, II, III, IV, VI и VII. Выполнение этих аксиом не приводит к выполнению аксиомы V, а значит, она от них независима. Ещё одна польза от построения модели – исследование непротиворечивости аксиоматики. Сведя геометрию к действиям с числами, то есть построив её *числовую модель*, мы можем быть уверены, что в геометрии нет противоречий, если не противоречивы свойства чисел. Об этом мы уже говорили в пункте 8.

Так что построив теорию планиметрии мы исследовали не конкретный мир геометрии, а некий свод законов для различных миров (моделей), являющихся воплощениями нашей теории. Интересно обсудить, можно ли построить модель геометрии из реальных объектов? То есть насколько воображаемый мир геометрии связан с миром в котором мы живём. Мы уже видели, что, например, измерение длин и углов в реальном мире соответствует тому, что мы понимаем под длиной и угловой мерой в геометрии. То есть можно сказать, что аксиомы IV и VII выполняются в привычной реальности. Сложности возникают с основными понятиями точки и прямой. Очевидно, что в нашем мире нет точек, то есть не имеющих размеров объектов. Даже элементарные частицы не подходят на роль точек – из-за квантовомеханических эффектов их невозможно выстроить в прямую или любую другую линию. Точно так же нет и бесконечных прямых. Возможно поэтому бесконечных прямых не было и в геометрии древних греков. Евклид, автор некогда популярного учебника [6], принимал как постулат «Что от всякой точки до всякой точки можно провести прямую линию», то есть под словом «прямая» понимался отрезок. Однако в следующем постулате говорилось, что этот отрезок можно непрерывно продолжать.

Действительно, по счастливой случайности в нашем мире есть сколько угодно отрезков¹³, под которыми можно понимать края любых вытянутых предметов. Точно также есть и углы, сторонами которых являются отрезки, а значит есть и треугольники, четырёхугольники и многие другие фигуры. Получается, что построить модель аксиом геометрии с помощью реальных объектов нельзя, зато саму геометрию можно применять для исследования формы предметов. Другими словами, не аксиоматика геометрии реализуется (моделируется) в реальности, а наоборот, реальные объекты изучаются с помощью абстрактных геометрических моделей, которыми являются те или иные геометрические фигуры. Зная теоремы о свойствах углов, треугольников и четырёхугольников, мы можем рассчитывать размеры и площади реальных предметов, имеющих форму этих фигур. Введя

¹³ Нет, конечно, дело не в счастливой случайности, так изначально и задумывалось основателями теории. Геометрия возникла как обобщение опыта обмера участков земли, так что отрезки, видимо, были идеализацией натянутых веревок, которыми отмечали границы участков. А вот бесконечные прямые и плоскости это уже позже возникшие объекты воображаемого мира геометрии, которые нужны для её логического построения.

координаты мы можем задавать числами расположение объектов в пространстве, описывать уравнениями траектории, то есть воображаемые линии, по которым движутся тела и так далее. В этом состоит практический смысл геометрии. Воображаемый мир можно использовать как инструмент исследования реального мира, если абстрагироваться (то есть перестать учитывать) от некоторых свойств физических объектов (например, массы, плотности, упругости и т.п.), а сосредоточиться только на их форме и размерах. Иногда можно не учитывать и размеры. Например, когда мы ищем расстояние между двумя удалёнными зданиями, размеры зданий нам не важны. Поэтому их можно рассматривать как точки на карте. То есть точка в этом случае является моделью здания, а расстояние между зданиями становится длиной отрезка на карте.

12. А можно было сделать всё по-другому?

Мы уже замечали, что нет единственно правильного пути построения аксиоматики геометрии. В нашей аксиоматике некоторые утверждения можно менять местами (например, аксиому VI и теорему 11) или сделать более слабыми (как аксиому IX), но можно построить и принципиально иные системы аксиом с другими неопределяемыми понятиями. Такие системы будут описывать ту же геометрию, но исходя из других идей, нежели аксиомы I-X и C_1 - C_3 .

Первую аксиоматику, на основе которой можно чисто логическим путём доказать любую теорему геометрии, разработал профессор Гёттингенского университета Давид Гильберт (1862 – 1943). До этого около двух тысяч лет использовался учебник [6], в котором не были сформулированы все необходимые аксиомы, так что при доказательствах его автор порой опирался на наглядные рисунки. Работу по устранению этих логических пробелов начал уже упоминавшийся математик Мориц Паш, а завершил Давид Гильберт в своей книге [7]. Неопределяемыми понятиями в аксиоматике Гильберта, как и в нашей книге, являются точки, прямые и плоскости.

Аксиоматика Гильберта задала стандарт обоснования математической теории. Во-первых, она является *полной*. То есть не существует такого утверждения, касающегося основных понятий аксиоматики, которое нельзя доказать или опровергнуть с помощью данных аксиом. Если бы такое утверждение существовало, то его можно было бы сделать новой аксиомой. Во-вторых, все аксиомы Гильберта являются *независимыми*, то есть ни одну аксиому нельзя доказать с помощью других аксиом. Наша аксиома VIII может быть доказана через другие аксиомы, так что она не является независимой. Правда доказательство оказывается сложным и совсем не школьным, за подробностями направляю читателя в [2]. В-третьих, аксиоматика Гильберта является *замкнутой*, то есть не опирается на понятия, которые сами требуют аксиоматического обоснования, как,

например, действительные числа и множества¹⁴. Поэтому она строится по традиции идущей от древних греков, когда прямые и плоскости понимаются не как множества точек, а как отдельные сущности, не сводящиеся к принадлежащим им точкам. Числа не упоминаются в аксиомах Гильберта, так что нет и автоматического введения меры для отрезков и углов, как в наших аксиомах IV и VII. Вместо этого можно ввести длину отрезка, сопоставив по определению некоторому отрезку число 1, а для любого другого отрезка найти длину по процедуре, напоминающей описанную в пункте 3. То же самое касается и введения градусной меры для углов.

Именно аксиоматику Гильберта обычно изучают в высшей школе в курсе оснований геометрии. Однако есть и другие популярные системы аксиом. *Аксиоматика Вейля* использует в качестве неопределяемых понятий точку и вектор (который в других системах аксиом может быть определён как направленный отрезок). Такой подход, хоть и не очень наглядный, зато значительно упрощает доказательство многих геометрических фактов, особенно в высшей геометрии. Изложение геометрии на основе аксиоматики Вейля можно найти в книге [8]. *Аксиоматика Биркгофа* идейно схожа с аксиоматикой представленной в нашей книге, потому что без доказательства вводит угловую меру и координаты точек на прямой (то есть не является замкнутой). Оригинальная *аксиоматика Тарского* использует в качестве основного понятия только точку с отношениями равенства и «лежать между». *Аксиоматика Александрова* основана на неопределяемом понятии отрезка, вместо прямой, что приближает её к истокам геометрии, уходящим в практику древних землемеров. Ну и, наконец, *аксиоматика Погорелова*, которую мы использовали в этой книге, весьма удобна для объяснения геометрии школьникам. Впрочем, на этом список возможных систем оснований геометрии далеко не исчерпан.

А можно сделать всё совсем по-другому? Совсем по-другому сделал ректор Императорского Казанского университета Николай Иванович Лобачевский (1792 – 1856). Вместо аксиомы X он принял за аксиому следующее утверждение: «Существует такая прямая a и точка A , не лежащая на ней, что через точку A проходит не менее двух прямых, не пересекающих прямую a и лежащих с ней в одной плоскости». Как видно это утверждение является отрицанием утверждения аксиомы X. Собственно изначальная идея была в том, чтобы доказать аксиому X методом от противного, найдя противоречие между противоположным ей утверждением и остальными аксиомами геометрии. Однако такого противоречия не нашлось. Оказалось, что аксиома X независима от всех остальных аксиом геометрии, так что она не может быть ни доказана, ни опровергнута с помощью

¹⁴ Но это не точно. Всё же для понимания аксиоматики Гильберта, как и любой другой, требуется как минимум знание логики (а она сама тоже может быть формализована на основании некоторых аксиом, вроде принципа исключенного третьего) и натуральных чисел, чтобы говорить о количестве точек, отрезков и т.п. С другой стороны логику и счет можно считать интуитивно ясными, как обычно и делают.

других аксиом. Вместо этого Лобачевский открыл новый геометрический мир в котором всё происходит не так как в обычном. Этот мир называется *геометрией Лобачевского*, в то время как обычная геометрия, где аксиома X выполняется, называется *евклидовой*. В мире геометрии Лобачевского открывается много неожиданных фактов. Можно сразу доказать, что если истинно отрицание аксиомы X, то оно выполняется не только для какой-то конкретной точки и прямой, а для любой прямой и не лежащей на ней точки. То есть через любую точку не лежащую на некоторой прямой на плоскости проходит не менее двух (а на самом деле бесчисленное количество) прямых, не пересекающих данную. В геометрии Лобачевского оказывается, что сумма углов треугольника всегда меньше 180° , а если у двух треугольников три угла равны, то равны и эти треугольники. В общем в этом мире всё не совсем так, как в школьном учебнике. Чуть позже, уже после смерти Лобачевского, была построена числовая модель его геометрии, которая показала, что геометрия Лобачевского так же непротиворечива, как и геометрия Евклида. Обоснование этой модели есть в книге [2].

Можно ли построить ещё какие-нибудь геометрии? Например, такую, в которой через точку, не лежащую на данной прямой, не проходит ни одна прямая, параллельная данной, то есть все прямые на плоскости пересекаются? Как мы видели, доказывая теорему 24, тот факт, что через точку не лежащую на прямой можно провести прямую, параллельную данной, не связан с аксиомой X, а следует из других аксиом. Поэтому принять вместо аксиомы X утверждение, что «любые две прямые на плоскости пересекаются» нельзя. Геометрия тут же станет противоречивой, потому что с помощью других аксиом можно доказать противоположное утверждение. Но если определённым образом поменять остальные аксиомы, то такой геометрический мир построить можно. Он называется *геометрией Римана*. Так мы приходим к тому, что выбирая различные аксиомы, можно создавать разные геометрические миры и исследовать их с помощью логики так же, как мы на протяжении всей этой книги исследовали мир евклидовой геометрии. В общем, добро пожаловать в математику.

Список литературы

- 1) Погорелов А. В. Геометрия. 7-9 классы. – М.: Просвещение, 2019.
- 2) Погорелов А. В. Геометрия. – М.: Наука, 1983.
- 3) Погорелов А. В. Элементарная геометрия. Изд. 3-е, доп. – М.: Наука, 1977.
Подробный конспект: <https://www.hanbekov.com/konspekt>
- 4) Колмогоров А. Н., Семенович А. Ф., Черкасов Р. С. Геометрия. Учеб. пособие для 6–8 кл. сред. шк. Изд. 4-е. – М.: Просвещение, 1982.
- 5) Калинин А. Ю., Терешин Д. А. Геометрия. 10-11 классы. – М.: МЦНМО, 2011.
- 6) Евклид. Начала. Тт. 1–3. – М.; Л.: Гостехиздат, 1948–1950.
- 7) Гильберт Д. Основания геометрии. – М.; Л.: Гостехиздат, 1948.
- 8) Болтянский В. Г. Элементарная геометрия. – М.: Просвещение, 1985.

Решения упражнений

1) Точки A , B и C лежат на одной прямой. Какая из этих точек лежит между двумя другими, если известны длины отрезков: $AB = 4,6$; $AC = 8,4$; $BC = 3,8$?

Допустим точка A лежит между B и C . Тогда для длин отрезков AB , AC и BC по аксиоме IV должно выполняться равенство: $BC = AB + AC$. Но $3,8 \neq 4,6 + 8,4$. Значит, точка A не лежит между B и C . Аналогично проверяется, что точка C не лежит между A и B . Следовательно, точка B лежит между точками A и C , потому что только в этом случае для длин отрезков выполняется равенство, требуемое аксиомой IV: $AC = AB + BC$.

2) Могут ли точки A , B и C лежать на одной прямой, если $AB = 5$, $BC = 7$, $AC = 6$?

Не могут. Если три точки лежат на одной прямой, то одна из них лежит между двумя другими (аксиома III), тогда по аксиоме IV сумма длин каких-нибудь двух отрезков должна быть равна третьему, что не выполняется.

3) Точки A , B и C лежат на одной прямой. Длина отрезка AB равна $3,8$, длина AC равна $2,4$. Найдите длину отрезка BC .

Как бывает в некоторых геометрических задачах, условие здесь сформулировано так, что возможны разные случаи расположения точек A , B и C на прямой. При этом в каждом варианте будут получаться разные ответы на вопрос задачи. Придётся рассмотреть все случаи по порядку.

Если точка A лежит между точками B и C , то $BC = AC + AB = 2,4 + 3,8 = 6,2$.

Если точка C лежит между A и B , то $AB = AC + BC \Rightarrow BC = AB - AC = 3,8 - 2,4 = 1,4$.

Если точка B лежит между A и C , то $AC = AB + BC \Rightarrow BC = AC - AB = 2,4 - 3,8 = -1,4$.

Но по аксиоме аксиоме IV длина должна быть больше нуля, следовательно точка B не может лежать между A и C . Ответы к задаче: $6,2$ или $1,4$.

4) Доказать, что если на полупрямой AB из её начальной точки A отложить отрезок AC , больший отрезка AB , то точка B будет лежать между точками A и C .

Точка A не может лежать между точками B и C , потому что A начальная точка полупрямой AB (определение полупрямой и понятия «лежат по одну сторону»). Если бы точка C лежала между A и B (\neg), то по аксиоме IV $AC + BC = AB$, а значит, $AB > AC$ (по свойству положительных чисел), но по условию $AC > AB$ \otimes . Значит, точка C не лежит между A и B . Но одна из трёх точек на прямой должна лежать между двумя другими (аксиома III), значит, точка B лежит между A и C .

5) Отрезок $AB = 5$. На полупрямой AB отложен отрезок $AC = 3$. Как расположены точки A , B и C ? Чему равна длина отрезка BC ?

$AC < AB$, значит, по **теореме 4** точка C лежит между A и B . Тогда по **аксиоме IV** $AB = AC + BC$, следовательно, $BC = AB - AC = 5 - 3 = 2$.

6) Даны четыре точки: A , B , C и D . Точки A , B и C лежат на одной прямой, и точки B , C и D тоже лежат на одной прямой. Докажите, что все четыре точки лежат на одной прямой.

Через точки B и C проходит одна прямая BC (**аксиома II**), по первому условию точка A лежит на прямой BC , а по второму точка D лежит на прямой BC , следовательно, все четыре точки лежат на одной прямой.

7) Даны четыре прямые a , b , c и d . Прямые a , b и c пересекаются в одной точке, и прямые b , c и d тоже пересекаются в одной точке. Докажите, что все четыре прямые пересекаются в одной точке.

Прямые b и c могут пересекаться только в одной точке (**теорема 2**). По первому условию, прямая a проходит через точку пересечения прямых b и c , а по второму прямая d проходит через точку пересечения прямых b и c , следовательно, все четыре прямые пересекаются в одной точке.

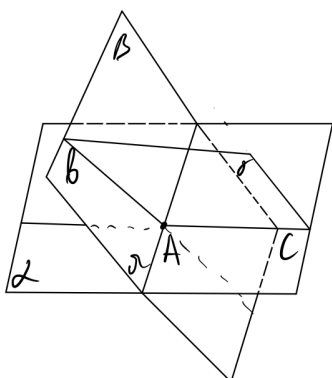
8) Доказать, что если точка C принадлежит прямой AB и $AC = CB$, то точка C является серединой отрезка AB .

Достаточно доказать, что точка C принадлежит отрезку AB . Допустим, что это не так (\neg). Тогда точка C не лежит между точками A и B (**определение отрезка**). Если точка A лежит между точками C и B , то по **аксиоме IV** $CB = CA + BA$, что противоречит условию $AC = CB$. Если точка B лежит между A и C , то $AC = AB + CB$, что также противоречит условию $AC = CB$. Значит, точка C лежит между точками A и B (**аксиома III**) \otimes . Таким образом, точка C принадлежит отрезку AB и с учётом условия $AC = CB$ является его серединой (**определене середины**).

9) Докажите, что если точки A , B , C , D не лежат в одной плоскости, то прямые AB и CD не пересекаются.

Допустим, что прямые AB и CD пересекаются (\neg). Тогда по **аксиоме C_3** через них проходит плоскость в которой лежат все точки этих прямых, в том числе точки A , B , C , D . Но по условию эти точки не лежат в одной плоскости \otimes . Значит, прямые AB и CD не пересекаются.

10) Пусть три различные плоскости попарно пересекаются. Докажите, что если две из прямых пересечения этих плоскостей пересекаются, то третья прямая проходит через точку их пересечения.



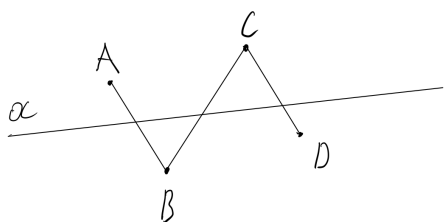
Пусть плоскость α пересекает плоскость β по прямой a , а плоскость γ по прямой c . Плоскости β и γ пересекаются по прямой b . Прямые b и c пересекаются в точке A . Докажем, что прямая a проходит через A .

Поскольку точка A принадлежит прямой c , а прямая c лежит в плоскости α , то и точка A принадлежит этой плоскости. Поскольку точка A принадлежит прямой b , а прямая b лежит в плоскости β , то и точка A принадлежит этой плоскости. На прямой a лежат все общие точки плоскостей α и β (аксиома C_2), поэтому она проходит через точку A .

11) Прямая AB пересекает отрезок CD , а прямая CD пересекает отрезок AB . Докажите, что отрезки AB и CD пересекаются.

Раз прямая AB пересекает отрезок CD , который по определению является частью прямой CD , то прямые AB и CD пересекаются в некоторой точке E . Точка E – единственная общая точка прямых AB и CD (теорема 2). По первому условию точка E лежит на отрезке CD , а по второму на отрезке AB . Следовательно, E – общая точка отрезков AB и CD , а значит, они пересекаются.

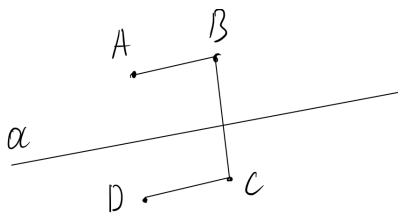
12) Дана прямая a и не лежащие на ней точки A, B, C и D . Отрезки AB, BC и CD пересекают прямую a . Пересекает ли прямую a отрезок AD ? Обоснуйте ответ.



Отрезок AB пересекает прямую a , следовательно, точки A и B лежат в разных полуплоскостях относительно прямой a . Отрезок BC пересекает прямую a , значит, точка C не лежит в полуплоскости точки B , а лежит в полуплоскости точки A . Отрезок CD пересекает прямую a , значит, точка D не лежит в

полуплоскости точек C и A , а лежит в другой полуплоскости. Раз точки A и D лежат в разных полуплоскостях, отрезок AD пересекает прямую a .

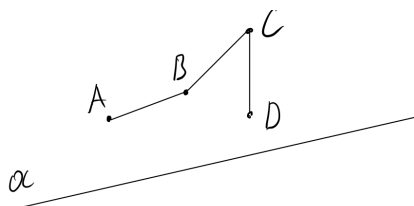
13) Дана прямая a и не лежащие на ней точки A, B, C и D . Отрезки AB и CD не пересекают прямую a , отрезок BC пересекает прямую a . Пересекает ли прямую a отрезок AD ? Обоснуйте ответ.



Отрезок AB не пересекает прямую a , значит, точка B лежит в полуплоскости точки A . Отрезок BC пересекает прямую a , значит, точка C не лежит в полуплоскости точек B и A , а лежит в другой полуплоскости. Отрезок CD не пересекает прямую a , значит, точка D лежит в одной полуплоскости с точкой C , и в разных полуплоскостях с точкой A .

Следовательно, отрезок AD пересекает прямую a .

14) Дана прямая a и не лежащие на ней точки A, B, C и D . Отрезки AB, BC и CD не пересекаются с прямой a . Пересекает ли прямую a отрезок AD ? Обоснуйте ответ.



Отрезок AB не пересекает прямую a , значит, точка B лежит в полуплоскости точки A . Отрезок BC не пересекает прямую a , значит, точка C лежит в одной полуплоскости с точками B и A . Отрезок CD тоже не пересекает a , значит, точка D лежит в одной полуплоскости с точкой C , а также B и A . Следовательно, отрезок AD не пересекается с a .

15) Изменить первый абзац доказательства теоремы 13, показав, что если точка X прямой AB не лежит в полуплоскости точки B , относительно прямой a , то X не принадлежит полупрямой AB .

Возьмём на прямой AB некоторую точку X , не лежащую в полуплоскости точки B относительно прямой a . Тогда отрезок BX пересекается с прямой a (теорема 12) в точке A (лемма 1). Следовательно, точка A принадлежит отрезку BX , а значит, точка A разделяет точки B и X (определение отрезка). Раз точка A разделяет точки B и X , эти точки не лежат по одну сторону от A (определение «лежат по одну сторону»), следовательно, точка X не принадлежит полупрямой AB (определение полупрямой).

16) Сформулировать все четыре варианта теорем для утверждений P и Q .

1. $P \Rightarrow Q$: Если точка X принадлежит прямой AB и лежит в полуплоскости точки B относительно прямой a , то X принадлежит полупрямой AB .
2. $Q \Rightarrow P$: Если точка X принадлежит полупрямой AB , то X принадлежит прямой AB и X лежит в одной полуплоскости с точкой B .
3. $\neg P \Rightarrow \neg Q$: Если точка X прямой AB не принадлежит полуплоскости точки B , то X не принадлежит полупрямой AB .
4. $\neg Q \Rightarrow \neg P$: Если точка X не принадлежит полупрямой AB , то либо X принадлежит прямой AB и не лежит в одной полуплоскости с точкой B , либо X не принадлежит прямой AB .

17) Запишите доказательство теоремы 13 в виде двух цепочек логических выводов (с использованием знаков \Rightarrow и **И**). В первой докажите что $Q \Rightarrow P$, а во второй $P \Rightarrow Q$, как мы делали для других теорем ранее.

1. X – произвольная точка на полупрямой AB (утверждение Q) **И** определение полупрямой \Rightarrow точки X и B лежат по одну сторону от A **И** определение «лежат по одну сторону» \Rightarrow точки X и B не разделяются точкой A **И** определение отрезка \Rightarrow точка A не принадлежит отрезку XB **И** лемма 1 \Rightarrow отрезок XB не пересекает прямую a **И** теорема 12 \Rightarrow точка X лежит в одной полуплоскости с B относительно прямой a (утверждение P) \Rightarrow каждая точка полупрямой AB лежит в одной полуплоскости с точкой $B \Rightarrow$ полупрямая AB может состоять только из тех точек прямой AB , которые лежат в одной полуплоскости с точкой B .
2. Точка X лежит на прямой AB в одной полуплоскости с точкой B (утверждение P) **И** теорема 12 \Rightarrow отрезок BX не пересекается с прямой a **И** лемма 1 \Rightarrow точка A не принадлежит отрезку BX **И** определение отрезка \Rightarrow точка A не лежит между X и B **И** определение «лежат по одну сторону» \Rightarrow точки B и X лежат по одну сторону от точки A **И** определение полупрямой \Rightarrow точка X принадлежит полупрямой AB (утверждение Q) \Rightarrow каждая точка прямой AB , лежащая в одной полуплоскости с точкой B , принадлежит полупрямой AB .

18) Запишите в виде логической цепочки доказательство из упражнения 15.

X – произвольная точка прямой AB , не лежащая в полуплоскости точки B относительно прямой a **И** теорема 12 \Rightarrow отрезок BX пересекается с прямой a **И** лемма 1 \Rightarrow точка A принадлежит отрезку BX **И** определение отрезка \Rightarrow точка A разделяет точки B и X **И** определение «лежат по одну сторону» \Rightarrow точки B и X не лежат по одну сторону от A **И** определение полупрямой \Rightarrow точка X не принадлежит полупрямой $AB \Rightarrow$ на полупрямой AB не может лежать точек прямой AB не из полуплоскости точки B .

19) Проанализируйте лемму 1 по схеме из четырёх теорем – прямой, обратной, противоположной и противоположной к обратной.

Напомним формулировку леммы 1: Если прямая a пересекается с прямой b в точке A , то любой отрезок прямой a пересекается с прямой b тогда и только тогда, когда содержит точку A .

Выражение «тогда и только тогда» указывает на равносильность утверждений, входящих в формулировку леммы.

Пусть A – точка пересечения прямых a и b , а BC некоторый отрезок на прямой a .

Сформулируем утверждения P и Q .

P – Точка A принадлежит отрезку BC .

Q – Отрезок BC пересекается с прямой b .

Сформулируем теперь четыре теоремы.

$P \Rightarrow Q$. Если точка A принадлежит отрезку BC , то отрезок BC пересекается с прямой b .

$\neg P \Rightarrow \neg Q$. Если точка A не принадлежит отрезку BC , то отрезок BC не пересекается с прямой b .

$Q \Rightarrow P$. Если отрезок BC пересекается с прямой b , точка A принадлежит отрезку BC .

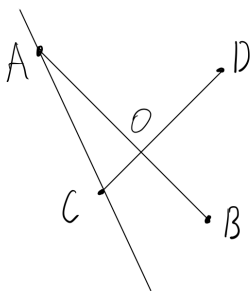
$\neg Q \Rightarrow \neg P$. Если отрезок BC не пересекается с прямой b , то точка A не принадлежит отрезку BC .

Теорема $P \Rightarrow Q$ следует непосредственно из определения пересечения.

Теорема $\neg P \Rightarrow \neg Q$ доказана в тексте методом от противного. При этом сделано допущение $\neg P \Rightarrow Q$, которое противоречит теореме 2.

Из верности теорем $P \Rightarrow Q$ и $\neg P \Rightarrow \neg Q$ следует равносильность $P \Leftrightarrow Q$.

20) Отрезки AB и CD лежат на разных прямых и пересекаются в точке O . Доказать, что отрезок BD не пересекает прямую AC .

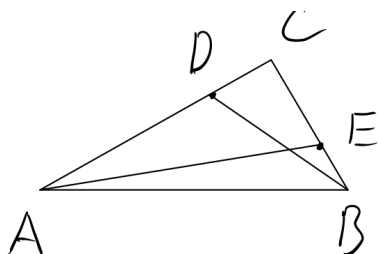


Прямая AC не совпадает с прямой AB , так как иначе у прямых AB и CD были бы две общие точки C и O , что невозможно по **аксиоме II**. Тогда по **теореме 14** отрезок AB лежит в одной полуплоскости относительно прямой AC , а именно в полуплоскости точки B . Следовательно, в этой полуплоскости лежит и его точка O . Аналогично отрезок CD лежит в полуплоскости, которой принадлежит его конец D , относительно прямой AC , а значит, в этой же полуплоскости лежит его точка O .

О. Получаем, что точки B и D лежат в одной полуплоскости с точкой O

относительно прямой AC . Следовательно, по **теореме 12** отрезок BD не пересекает прямую AC .

21) Дан треугольник ABC . На стороне AC взята точка D , а на стороне BC – точка E . Докажите, что отрезки AE и BD пересекаются.



Отрезок BC лежит в полуплоскости точки C относительно прямой BD (**теорема 14**). Значит, в этой же полуплоскости лежит его точка E . Точки A и C лежат в разных полуплоскостях, относительно прямой BD , так как отрезок AC пересекается с этой прямой в точке D (**теорема 12**). Следовательно, точки A и E лежат в разных полуплоскостях относительно прямой BD и отрезок AE пересекает эту прямую.

Повторим эти же рассуждения так, чтобы в конце получить пересечение отрезка BD и прямой AE . Отрезок AC лежит в полуплоскости точки C относительно прямой AE . Значит, в этой же полуплоскости лежит его точка D . Точки B и C лежат в разных полуплоскостях, относительно прямой AE , так как отрезок BC пересекается с этой прямой в точке E . Следовательно, точки B и D лежат в разных полуплоскостях относительно прямой AE и отрезок BD пересекает эту прямую.

Прямые AE и BD пересекаются в одной точке (**теорема 2**). По доказанному на прямой AE это точка принадлежит отрезку AE , а на прямой BD отрезку BD . Следовательно, отрезки AE и BD пересекаются.

22) Запишите доказательство леммы 2 в виде логической цепочки.

A – точка прямой a **И** аксиома I \Rightarrow на прямой a существует точка B **И** определение полупрямой \Rightarrow существует полупрямая BA **И** аксиома IV \Rightarrow существует отрезок BC , больший BA **И** теорема 4 \Rightarrow точка A лежит между точками B и C на прямой a .

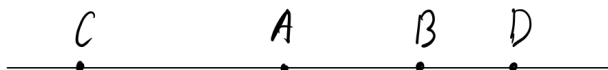
23) Точка B лежит на полупрямой AC , докажите, что отрезок AB является частью полупрямой AC , то есть любая точка отрезка AB принадлежит полупрямой AC .

Пусть X – произвольная точка отрезка AB . Тогда точки B и X лежат по одну сторону от точки A , следовательно, принадлежат одной и той же полупрямой, то есть полупрямой AC .

24) Пусть на полупрямой AD отложены отрезки AB и AC . Докажите, что если $AC < AB$, то точка C лежит между точками A и B , если $AC > AB$, то точка B лежит между точками A и C .

Доказательство дословно такое же, как доказательство теоремы 4, только при обосновании того, что точка A не может лежать между точками B и C теперь надо сослаться не на определение полупрямой и понятия «лежат по одну сторону», а на теорему 15.

25) Укажите пары совпадающих и дополнительных полупрямых на рисунке.



Дополнительные BA и BD , совпадающие – BA и BC ; DA , DB и DC ; CA , CB и CD .

26) Пусть X – произвольная точка отрезка AB . Докажите, что отрезок AX является частью отрезка AB , то есть что любая точка отрезка AX является точкой отрезка AB .

X – точка отрезка AB и, следовательно, X лежит на полупрямой AB (теорема 3). Пусть Y произвольная точка отрезка AX . Точки X и Y лежат по одну сторону от точки A , следовательно, они обе принадлежат одной полупрямой, то есть полупрямой AB (теорема 15). Отрезок AY является частью полупрямой AB (упражнение 23).

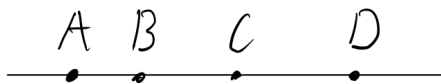
По аксиоме IV $AB = AX + XB$, следовательно, $AX < AB$. Аналогично доказывается, что $AY < AX$. Из двух неравенств следует, что $AY < AB$. Тогда по теореме 4 точка Y лежит между точками A и B , следовательно, она принадлежит отрезку AB .

27) Доказать, что если точки A и B лежат в одной полуплоскости относительно прямой a , то весь отрезок AB лежит в одной полуплоскости относительно прямой a .

Точки A и B лежат в одной полуплоскости относительно прямой a , значит, на отрезке AB нет точек, принадлежащих прямой a . Пусть X – произвольная точка отрезка AB . По доказанному в упражнении 26 отрезок AX является частью отрезка AB . Так как на отрезке AB нет точек пересечения с прямой a , то и на отрезке AX нет точек пересечения с прямой a , следовательно, точка X лежит в полуплоскости точки A .

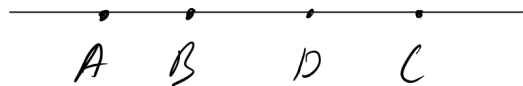
28) Точки A , B , C и D лежат на одной прямой. Точка B лежит между A и C , точка C лежит между B и D . Доказать, что точка C лежит между A и D .

Точка C делит прямую на две полупрямые (теорема 15). Точка C лежит между точками B и D , следовательно точки B и D лежат на разных полупрямых. Точка B



лежит между точками A и C , следовательно, точки A и B лежат по одну сторону от точки C (определение «лежат по одну сторону»), следовательно, точка A лежит на полупрямой CB (определение полупрямой). Точки A и D принадлежат разным полупрямым, следовательно, они разделяются точкой C (теорема 15).

29) Точки B и D лежат на прямой AC между точками A и C , точка B лежит между A и D . Доказать, что точка D лежит между B и C .



Нам даны три условия:

1. Точка B лежит между A и C ($A - B - C$),
2. Точка D лежит между A и C ($A - D - C$),
3. Точка B лежит между A и D ($A - B - D$).

Рассмотрим все возможные расположения точек B , C и D .

Допустим, что точка C лежит между B и D . Тогда существуют полупрямые CB и CD , и точка A лежит на полупрямой CB (условие 1), следовательно, точка A не лежит на полупрямой CD , то есть точки A и D разделяются точкой C , что противоречит условию 2. Значит точка C не может лежать между B и D .

Допустим, что точка B лежит между D и C . Тогда существуют полупрямые BD и BC . Точка A не лежит на BD (условие 3), следовательно, точка A лежит на полупрямой BC , но это противоречит условию 1. Значит, точка B не лежит между D и C .

Так как одна из трёх точек лежит между двумя другими, точка D лежит между точками B и C .

30) Докажите, что если $|a| = |b|$, то либо $a = b$ (если a и b одного знака), либо $a = -b$ (если a и b разных знаков).

Рассмотрим четыре случая. 1. Если $a < 0$ и $b < 0$, то по определению модуля $-a = -b$, следовательно, $a = b$. 2. Если $a < 0$ и $b > 0$, то $-a = b$, следовательно, $a = -b$. 3. Если $a > 0$ и $b > 0$, то $a = b$. 4. Если $a > 0$ и $b < 0$, то $a = -b$.

31) Пусть точка C – середина отрезка AB . Докажите, что координата точки C равна полусумме координат точек A и B .

Обозначим a – координату точки A , b – координату точки B , c – координату C . По определению середины $AC = BC$, тогда по теореме 16 $|c - a| = |c - b|$. Числа $(c - a)$ и $(c - b)$ либо одного знака, либо разных. Тогда по доказанному в упражнении 30 либо $c - a = c - b$, либо $c - a = -(c - b)$. В первом случае получается, что $a = b$, что невозможно так как точки A и B различны. Значит, $c - a = -(c - b)$, откуда получаем $c = \frac{a + b}{2}$.

32) Пусть C_1 – середина отрезка AB , а C_2 середина отрезка BD . Докажите, что $AD = 2C_1C_2$.

Обозначим a, b, d, c_1, c_2 координаты точек A, B, D, C_1, C_2 соответственно.

Вспользуемся результатом упражнения 31: $c_1 = \frac{a + b}{2}$, $c_2 = \frac{b + d}{2}$. Тогда $|c_2 - c_1| = \left| \frac{b + d}{2} - \frac{a + b}{2} \right| = \frac{|b + d - a - b|}{2} = \frac{|d - a|}{2}$. Отсюда имеем $|d - a| = 2|c_2 - c_1|$, что в соответствии с теоремой 16 и означает $AD = 2C_1C_2$.

33) Пусть AB некоторый отрезок и координата a точки A меньше чем координата b точки B . Доказать, что если точка C принадлежит отрезку AB , то её координата c принадлежит числовому интервалу $(a; b)$. Обратное, если число c принадлежит интервалу $(a; b)$, то точка C с координатой c принадлежит отрезку AB .

Докажем первое утверждение. Если C точка отрезка AB , то $AB = AC + BC$. Тогда по теореме 16 $|b - a| = |c - a| + |c - b|$. Докажем, что это равенство выполняется только если $a < c < b$. Допустим, что c меньше a , а значит, и b , тогда имеем $b - a = a - c + b - c$, то есть $-a = a - 2c$, что равносильно $a = c$. Но это невозможно, так как точка C не совпадает с точкой A . Допустим, что c больше b , а значит, и больше a . Тогда $b - a = c - a + c - b$, то есть $b = c$, что также невозможно. Значит, выполняется условие $a < c < b$.

Докажем второе утверждение. Пусть число c принадлежит интервалу $(a; b)$, то есть выполняется неравенство $a < c < b$. Допустим, точка A лежит между C и B . Тогда $BC = AC + AB$, то есть $|c - b| = |c - a| + |b - a|$. Раскрываем модули с учётом условия $a < c < b$, получаем $b - c = c - a + b - a$, или $c = a$. Допустим теперь, что точка B лежит между A и C . Тогда $AC = AB + CB$, то есть $|c - a| = |b - a| + |c - b|$, что при указанном неравенстве означает $c - a = b - a + b - c$, или $c = b$. Таким образом, только точка C может лежать между A и B .

34) Расставить в доказательстве теоремы 17 ссылки на используемые утверждения.

Рассмотрим случай развёрнутого угла с вершиной O . Его стороны лежат на одной прямой (по определению), и через точку O можно провести какую-нибудь прямую b , пересекающую прямую развёрнутого угла (теорема 1). Точка O образует на прямой b два луча (теорема 15), оба из которых проходят между сторонами развёрнутого угла (по определению).

В случае неразвёрнутого угла отметим какую-нибудь точку A на стороне a и точку B на стороне b (по теореме 5 на полупрямой есть сколько угодно точек), тогда существует отрезок AB (аксиома IV). Пусть C – некоторая точка отрезка AB (по определению отрезка он состоит из точек), проведём через неё прямую OC (аксиома II). Луч OC проходит между сторонами угла (ab) , так как пересекает отрезок AB с концами на сторонах угла (ab) (по определению).

35) Приведите пример, каковы должны быть градусные меры углов (ab) , (ac) и (bc) , чтобы луч c не мог проходить между сторонами угла (ab) .

Например, $\angle(ac) = 35^\circ$, $\angle(bc) = 40^\circ$, $\angle(ab) = 90^\circ$. Луч c не может проходить между сторонами угла (ab) , потому что в этом случае должно выполняться равенство $\angle(ab) = \angle(ac) + \angle(bc)$, а оно при таких градусных мерах не выполняется.

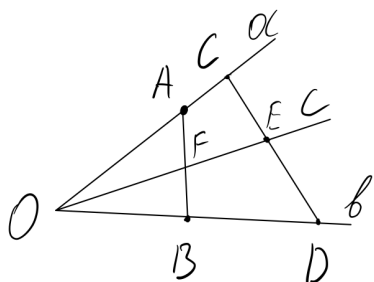
36) Добавьте в доказательство теоремы 19 ссылки на используемые утверждения.

Сначала рассмотрим случай, когда угол (ab) развёрнутый. Тогда его стороны являются дополнительными полупрямыми (по определению), точки которых разделяются вершиной угла (теорема 15). В этом случае любой отрезок AB с концами на разных сторонах угла, содержит вершину угла (по определению отрезка). Луч c по определению исходит из вершины угла. Поэтому отрезок AB пересекается с прямой, содержащей луч c , в вершине угла (лемма 1). Следовательно, точки A и B лежат в разных полуплоскостях относительно прямой, содержащей луч c (теорема 12).

Пусть теперь угол (ab) неразвёрнутый. Так как луч c проходит между сторонами угла (ab) , то он пересекает некоторый отрезок AB с концами на сторонах угла (по определению). Так как отрезок AB пересекается с прямой, содержащей луч c , то точки A и B лежат в разных полуплоскостях относительно этой прямой (теорема 12).

По теореме 13 полупрямая a лежит в одной полуплоскости относительно прямой, содержащей луч c , именно в полуплоскости где лежит точка A . По той же теореме полупрямая b лежит в полуплоскости, которой принадлежит точка B . Так как точки A и B лежат в разных полуплоскостях относительно прямой, содержащей луч c , то и полупрямые a и b лежат в разных полуплоскостях и в случае развёрнутого, и в случае неразвёрнутого угла.

37) Докажите, что если луч s проходит между сторонами неразвёрнутого угла (ab) , то он пересекает любой отрезок с концами на сторонах угла (ab) .



Пусть CD произвольный отрезок с концами на сторонах угла (ab) . По **теореме 19** прямая, содержащая луч s , разделяет стороны угла, следовательно, точки C и D лежат в разных полуплоскостях относительно этой прямой. Тогда по **теореме 12** прямая, содержащая луч s , пересекает отрезок CD в некоторой точке E . Нам осталось доказать, что точка E лежит на луче s , а не на дополнительном к нему луче.

Если луч s проходит между сторонами угла (ab) , то по **определению** он пересекает некоторый отрезок AB с концами на сторонах угла. Обозначим их точку пересечения F .

По **теореме 13** луч a лежит в одной полуплоскости относительно прямой OD (O – это у нас вершина угла). Значит, точки A и C лежат в одной полуплоскости. Тогда по **теореме 14** отрезки AB и CD тоже лежат в одной полуплоскости относительно прямой OD (в полуплоскости своих концов A и C). Значит, точки F и E лежат в одной полуплоскости.

Допустим, что точка E лежит на полупрямой дополнительной к s (\neg). Тогда точки E и F разделяются точкой O (**теорема 15**), и тогда эти точки лежат в разных полуплоскостях относительно прямой OD (**теорема 12**), что противоречит тому, что они лежат в одной полуплоскости \otimes . Значит, точка E лежит на луче s .

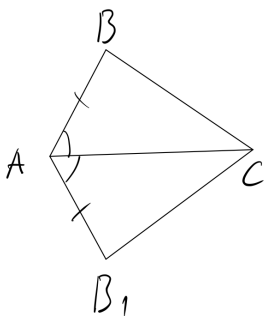
38) Составьте таблицу аналогичных понятий и утверждений из теории углов и теории отрезков. В левый столбец записывайте всё, что связано с углами, а в правый всё, что относится к отрезкам. Если какое-то понятие или утверждение (например, «развёрнутый угол») не имеет аналогии, то поставьте в соседнем столбце прочерк.

Угол	Отрезок
Сторона угла	Конец отрезка
Вершина угла	–
Развёрнутый угол	–
Луч, проходящий между сторонами угла	Точка отрезка
Теорема 17	Первое предложение аксиомы IV

Градусная мера	Длина
Аксиома VII	Аксиома IV
Равенство углов	Равенство отрезков
Теорема 18	–
Аксиома VIII	Аксиома V
Теорема 20	Аксиома III
Теорема 21	Теорема 4
Биссектриса	Середина

39) В треугольниках FPL и MNK $FP = MN$, $PL = NK$, $FL = MK$, $\angle F = \angle K$, $\angle P = \angle M$, $\angle L = \angle N$. Можно ли из этого сделать вывод, что треугольники равны?

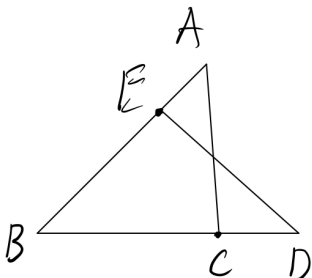
Нет, так как углы, лежащие против приравненных сторон не приравнены друг другу. Например, по условию $FP = MN$, но не сказано, что угол L , лежащий против FP , равен углу K , лежащему против MN .



40) В треугольниках ABC и AB_1C $AB = AB_1$ и $\angle BAC = \angle B_1AC$. Доказать, что $BC = B_1C$.

По условию $AB = AB_1$ и $\angle BAC = \angle B_1AC$, и сторона AC обоих треугольников общая, то есть $AC = AC$. Значит выполняются все три условия **аксиомы IX**, поэтому $\triangle ABC = \triangle AB_1C$. По определению равенства треугольников это означает, что $BC = B_1C$.

41) Точка E лежит на прямой AB между точками A и B . Точка C лежит на прямой BD между точками B и D . $AB = 5$, $AC = 7$, $BC = 3$, $AE = 2$, $CD = 2$. Найти длину ED .



Точка E лежит между A и B , следовательно, $AB = BE + EA \Rightarrow$

$$BE = AB - EA = 5 - 2 = 3.$$

Точка C лежит между B и D , следовательно, $DB = CD + BC = 2 + 3 = 5$.

Точки E и A лежат по одну сторону от точки B , следовательно, лучи BE и BA совпадают. Аналогично,

совпадают лучи BC и BD , следовательно, $\angle EBD$ и $\angle ABC$ это один и то же угол. Тогда в треугольниках DBE и ABC $DB = AB = 5$, $BE = BC = 3$, угол B общий, следовательно, $\triangle DBE = \triangle ABC$ по **аксиоме IX**. По определению в равных треугольниках стороны, лежащие против приравненных углов, равны, значит $ED = AC = 7$.

42) Пусть ABC данный треугольник. Докажите, что для любого луча a с начальной точкой A_1 и точки M , не лежащей на прямой, содержащей луч a , существует треугольник $A_1B_1C_1$, равный треугольнику ABC , такой что точка B_1 лежит на луче a , а точка C_1 лежит в полуплоскости точки M .

Отложим на луче a , от его начальной точки A_1 отрезок A_1B_1 , равный отрезку AB (аксиома V). Отложим от луча a в полуплоскость точки M угол, равный углу CAB (аксиома VIII). На построенной стороне этого угла отложим отрезок A_1C_1 , равный отрезку AC (аксиома V). Получившийся треугольник $A_1B_1C_1$ лежит в полуплоскости точки M относительно прямой, содержащей луч a , и равен треугольнику ABC по аксиоме IX.

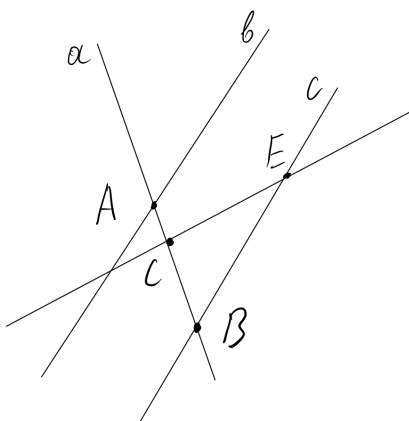
43) Докажите первый признак равенства треугольника, приняв вместо него за аксиому, что каков бы ни был треугольник, существует равный ему треугольник в заданном расположении относительно данной полупрямой.

Это доказательство есть в школьном учебнике [1] (в пунктах 20-21), так что если вы освоили программу 7 класса, то наверняка его знаете.

44) Пусть прямая a параллельна прямой b . Докажите, что все точки прямой a лежат в одной полуплоскости относительно прямой b .

Пусть A и B произвольные точки прямой a . Прямая a параллельна b , значит, эти прямые не имеют общих точек (по определению). Отрезок AB состоит из точек прямой a (по определению отрезка), значит, он тоже не имеет общих точек с прямой b , то есть не пересекается с этой прямой. Значит по теореме 12 точки A и B лежат в одной полуплоскости относительно прямой b .

45) Пусть прямые a и b пересекаются в точке A . Точка E не принадлежит прямым a и b . Докажите, что через точку E можно провести прямую, не проходящую через точку A и пересекающую прямые a и b .



Проведём через точку E прямую c , параллельную прямой b . Эта прямая не может быть параллельна a , потому что иначе получится, что через точку A проходят две прямые (a и b), параллельные прямой c , что противоречит аксиоме X. Следовательно, прямая c пересекает a в некоторой точке B . Отметим на прямой a точку C , отличную от точек A и B , и построим прямую EC . Эта прямая не может быть параллельна прямой b , так как в этом случае через точку E проходили бы две прямые (EB и EC), параллельные b . Следовательно, прямая EC

пересекает прямую b в некоторой точке, отличной от точки A (потому что у прямых EC и a не может быть двух общих точек C и A).

46) Из каждого пункта книги выпишите впервые встретившиеся в нём понятия по следующей схеме. 1) Объекты. Например, точка, отрезок, длина и т.п. 2) Отношения между объектами. Например, принадлежать, лежать между, иметь длину. 3) Названия фигур, состоящих в определённом отношении с другими фигурами (для краткости будем называть их «ролями фигуры»). Например, конец отрезка, сторона треугольника. Отметьте какие понятия в аксиоматике являются *основными*, то есть не имеют определения и задаются только аксиомами.

Основные понятия выделены жирным шрифтом.

Принадлежность и пересечение

Объекты: **точка, прямая.**

Отношения: **принадлежать (прямой)**, пересечение прямых.

Роли: точка пересечения.

Отрезок

Объекты: отрезок, длина, полупрямая.

Отношения: **лежать между**, лежать по одну сторону, принадлежать (отрезку), принадлежать (полупрямой), **иметь длину**, больше, меньше равно (для отрезков).

Роли: конец отрезка, начальная точка полупрямой.

Пространство и плоскость

Объекты: **плоскость.**

Отношения: **принадлежать (плоскости)**, пересечение (плоскостей).

Роли: прямая пересечения плоскостей.

Полуплоскость

Объекты: полуплоскость, треугольник.

Отношения: пересечение отрезка и прямой, принадлежать (полуплоскости), координаты (точки и числа), дополнительные полупрямые.

Роли: вершины треугольника, стороны треугольника, середина отрезка, начало координат, положительная и отрицательная полупрямые.

Угол

Объекты: угол, развёрнутый угол, градусная мера, биссектриса.

Отношения: проходить между сторонами угла, **иметь градусную меру**, больше, меньше равно (для углов).

Роли: вершина угла, сторона угла.

Равенство треугольников

Объекты: –

Отношения: лежать против стороны (для угла), лежать против угла (для стороны), равенство треугольников, соответствующие стороны и углы.

Роли: угол треугольника.

Параллельные прямые

Объекты: –

Отношения: параллельность, смежные углы.

Роли: –

Замечание. Принадлежность точки прямой не определяется, поэтому является основным понятием, а вот принадлежность точки отрезку или полупрямой имеют определение. Например, точка принадлежит отрезку AB если она лежит между точками A и B на прямой AB . Поэтому принадлежность отрезку/полупрямой не является основным понятием.

Длина и градусная мера не относятся к основным понятиям, потому что мы знаем, что это такое – числа, соответствующие отрезку/углу. А вот как именно они поставлены в соответствие не известно, так как это соответствие задано аксиомами. Поэтому иметь длину и иметь градусную меру – основные понятия.